(1)

Del M-1.1 al M-2.13

MODELOS CORPÓREOS



INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.- DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

UNE A4 210 x 297

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

ENUNCIADO.- Estudio previo a la construcción de los modelos de los cinco poliedros regulares convexos. Definiciones y propiedades

1) POLIEDROS CONVEXOS EN GENERAL

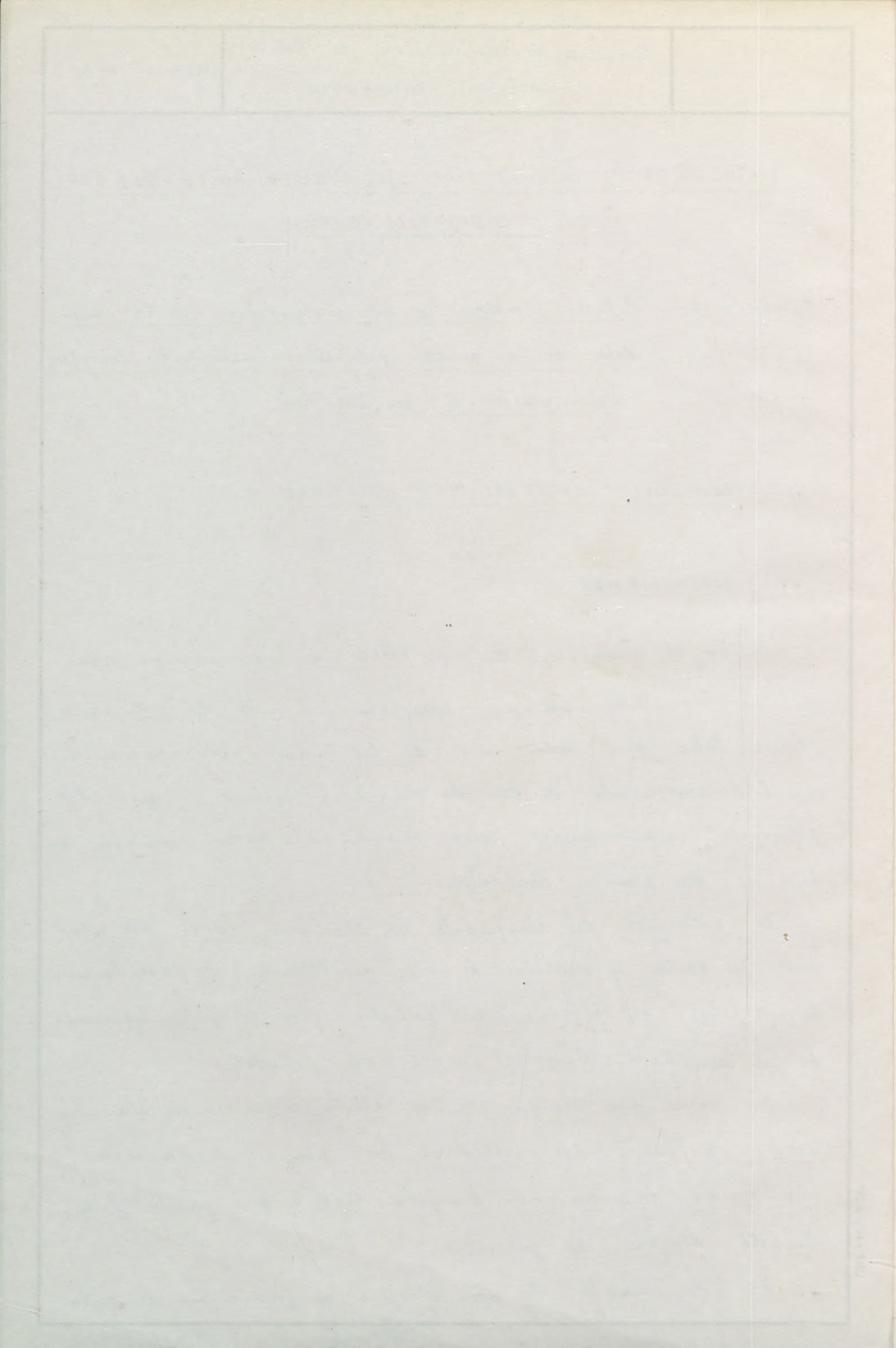
1.1.- DEFINICIONES

Recibe el nombre de poliedro a todo cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezcan simultáneamente a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común, estén en dos planos distintos.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro; los lados y vértices de ellos se llaman respectivamente aristas y vértices del poliedro y los ángulos internos de los mismos, ángulos planos del poliedro

Dos caras que tengan una arista común se llaman caras contiguas del poliedro. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo diedro que recibe el nombre de diedro del poliedro.

En cada vértice de un poliedro se forma un ángulo



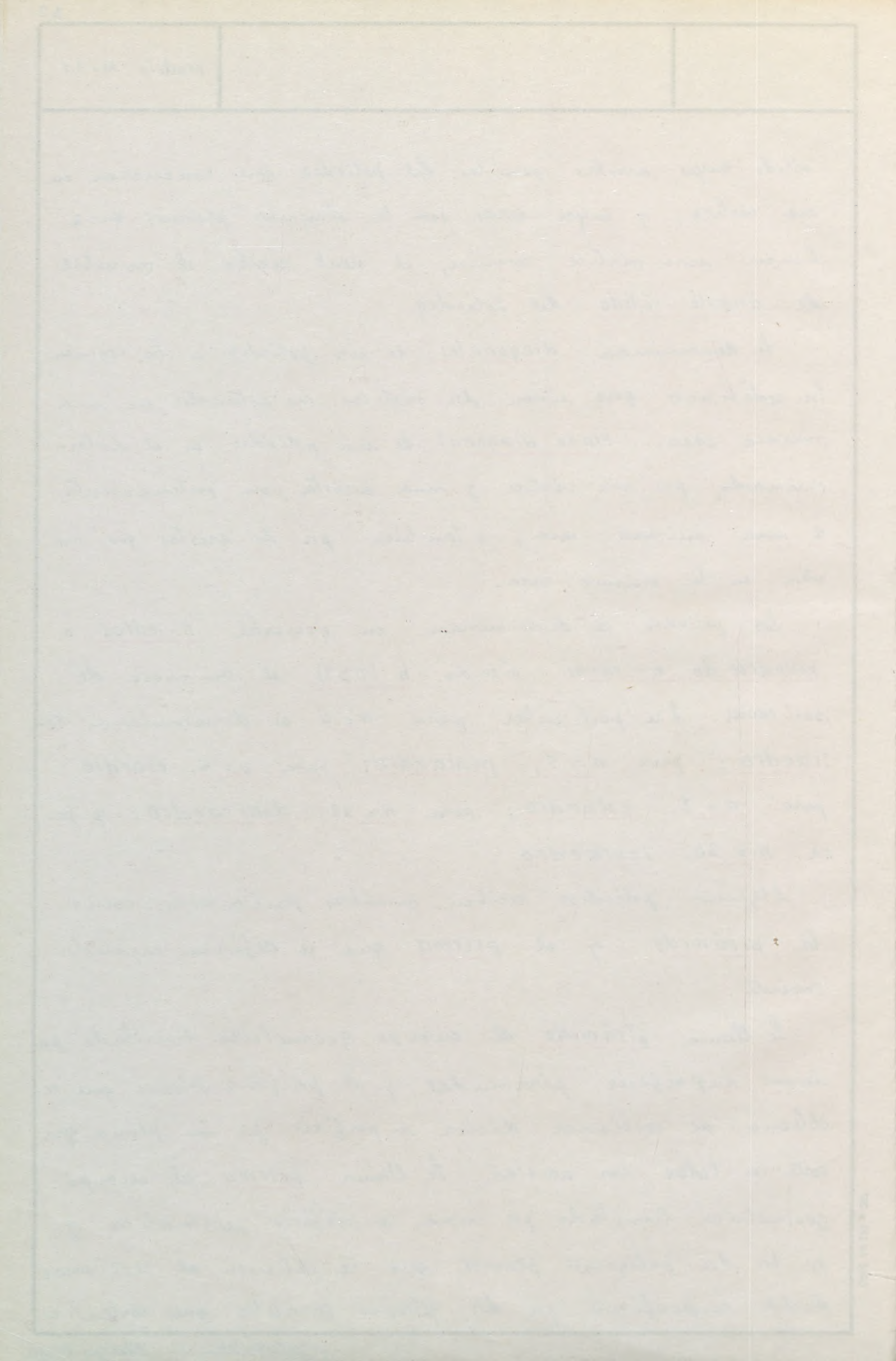
sólido cuyas aristas son las del poliedro que concurren en ese vértice, y cuyas caras son los ángulos planos que tienen un vértice común, el cual recibe el nombre de ángulo sólido del poliedro

Se denominan diagonales de un poliedro a los segmentos rectilíneos que unen dos vértices no situados en una misma cara. Plano diagonal de un poliedro es el determinado por un vértice y una arista no pertenecientes a una misma cara, o también por dos aristas que no estén en la misma cara.

Los poliedro se denominan en general n-edros o poliedros de n-caras siendo n $(n>3)$ el número de sus caras. En particular para $n=4$ se denomina tetraedro; para $n=5$, pentaedro; para $n=6$, exaedro; para $n=8$, octaedro; para $n=12$, dodecaedro; y para $n=20$, icosaedro

Algunos poliedros reciben nombres particulares, como la pirámide y el prisma que se definen seguidamente.

Se llama pirámide al cuerpo geométrico limitado por una superficie piramidal y el polígono plano que se obtiene al seccionar dicha superficie por un plano que corte a todas sus aristas. Se llama prisma al cuerpo geométrico limitado por una superficie prismática y por los dos polígonos planos que se obtienen al seccionar dicha superficie por dos planos paralelos que corten a



todas las aristas.

Los polígonos planos que limitan un poliedro constituyen el contorno del mismo, y la superficie de ellos forman la superficie del poliedro. Siendo el contorno de un polígono una línea cerrada, el de un poliedro es a su vez una superficie poliédrica finita y cerrada.

Un poliedro de n aristas tiene n diedros. Si el poliedro tiene n vértices tendrá también n ángulos sólidos

Si prolongamos todas las caras de un poliedro, y se verifica que cada cara deja al poliedro en un mismo semi-espacio, el poliedro se denomina convexo

Si al prolongar todas las caras hay al menos una de ellas que corta al poliedro y deja por lo tanto una parte del mismo en distinto semi-espacio, el poliedro se denomina cóncavo

Así pues, el cuerpo geométrico denominado poliedro convexo puede definirse también como el lugar geométrico de los puntos comunes a los semi-espacios, cada uno de los cuales tiene por contorno el plano de una cara y contiene además a las restantes; por consiguiente, el plano de una cara deja a todos los vértices del poliedro (excepto a los de dicha cara) en un mismo semi-espacio.

Los puntos comunes a los semi-espacios, se denominan puntos interiores al poliedro. Los no comunes son

puntos exteriores. Los puntos pertenecientes a una cara son puntos superficiales.

1.2.- GÉNERO Y ESPECIE DE LOS POLIEDROS CONVEXOS

Se ha definido el género de un polígono cualquiera como el número de sus lados. Análogamente llamaremos género de un poliedro al número de sus caras.

Proyectando la superficie de un poliedro desde un punto interior convenientemente elegido, para que los rayos proyectantes atraviesen la superficie igual número de veces en todos sentidos, este número se llama especie del poliedro. Los poliedros convexos son todos de primera especie.

1.3.- POLIEDROS REGULARES CONVEXOS Y CÓNCAVOS

Un poliedro se dice que es regular si tiene todas sus caras iguales en forma de polígonos regulares, y si sus ángulos diedros son todos iguales.

Los poliedros regulares pueden ser convexos o de "primera especie, si sus caras son polígonos regulares convexos iguales; y cóncavos o de especie superior, si sus caras son polígonos regulares cóncavos (o convexos) todos iguales.

1.4 POLIEDROS REGULARES CONVEXOS



Solo existen cinco géneros de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares convexos del mismo número de lados y en sus vértices y ángulos sólidos concurren el mismo número de aristas.

Estos cinco poliedros regulares convexos, son los siguientes:

1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por cuatro caras triangulares regulares, convexas e iguales.

2) EXAEDRO REGULAR CONVEXO (o CUBO), formado por seis caras cuadradas, o cuadriláteros regulares convexos iguales.

3) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por ocho caras triangulares; regulares, convexas e iguales.

4) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO. formado por doce caras pentagonales, regulares, convexas e iguales.

5) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por veinte caras triangulares, regulares, convexas e iguales.

1.5 POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.- PROPIEDADES

Entre las muchas propiedades de estos poliedros, destacamos las siguientes;

Siendo "n" el número de caras del poliedro regular convexo considerado ($n = 4, 6, 8, 12$ ó 20) y teniendo en cuenta la definición de poliedro regular convexo, y las consecuentes propiedades, deducidas de ella, tendremos:



1.51 Todas las n caras de un poliedro regular convexo, son iguales y tienen la forma de polígonos regulares convexos de lado igual a la arista ($l = a_n$) del mismo. Los polígonos de sus caras sólo pueden ser triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares convexos.

1.52.- Las n aristas a_n de todo poliedro regular convexo, son todas de igual longitud.

1.53.- Los n ángulos sólidos de todo poliedro regular convexo, son todos iguales (congruentes y coincidentes por superposición), estando formado por tres, cuatro o cinco caras; tres, cuatro o cinco aristas; y un vértice.

1.54 Los n diedros que forman dos caras contiguas, de todo poliedro regular convexo, son todos de igual amplitud.

1.55 Todo poliedro regular convexo tiene un centro O

1.56 Los n vértices de un poliedro regular convexo, equidistan de su centro O

1.57 En todo poliedro regular convexo, existe una es-

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



fera de radio "r_{ec}^{n}" y centro en O, que pasa por sus n vértices. Dicha esfera se denomina esfera circunscrita.

1.58 Los n centros de los polígonos regulares convexos que forman las n caras de todo poliedro regular convexo, equidistan del centro O de éste.

1.59 En todo poliedro regular convexo existe una esfera de radio "r_{ei}^{n}" y centro en O, que pasa por los n centros de sus caras. Dicha esfera se denomina esfera inscrita

1.60 Los n puntos medios de las n aristas de todo poliedro regular convexo, equidistan del centro O de éste

1.61 En todo poliedro regular convexo existe una esfera de radio "r_{et}^{n}" y centro O, que pasa por los n puntos medios de sus aristas. Dicha esfera se denomina esfera tangente a las aristas.



TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, representado en la lámina 1 del ejercicio G.E.

DATOS: Radio r_{ec}^{4} o radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular pedido.

$$r_{ec}^{4} = 76,1 \text{ mm}$$

Las características del tetraedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 4$
Número de vértices	$V = 4$
Número de aristas	$A = 6$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_3$

El modelo corpóreo que se estudia, es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas.

PIEZA Nº 1 CARA SUPERFICIALES 4 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado l_3 es igual a la aris-

Calvarro Octubre 1978



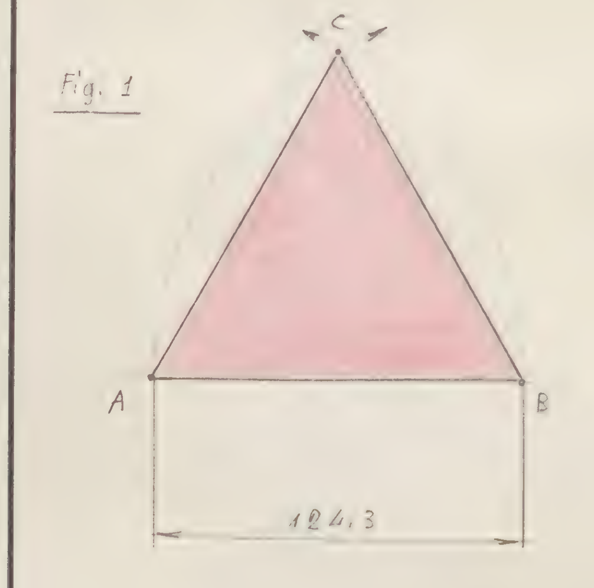
ta a_4 del tetraedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_4 de la fórmula nº del ejercicio G. E. o sea:

$r_{pc}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4$ de donde $\boxed{a_4} = r_{pc}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{pc}^{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$

$= r_{pc}^{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \cong 76,1 \times 1,63\,29\,93\,16\,2... \cong 124,27\,01\,79\,6$

$\cong$ **124,3 mm**



PIEZA Nº 1 4 (U)

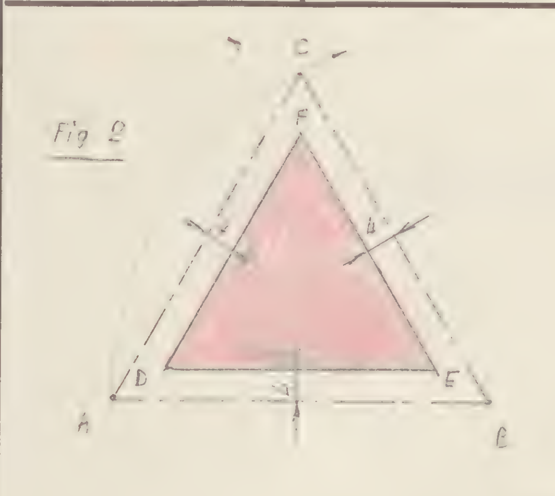
Fig. 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Es un triángulo equilátero cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la figura 1 (triángulo DEF de la figura 2).



Modelo M - 1.1

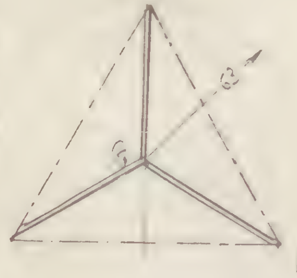


PIEZA Nº 2 4 (U)

Fig. 2

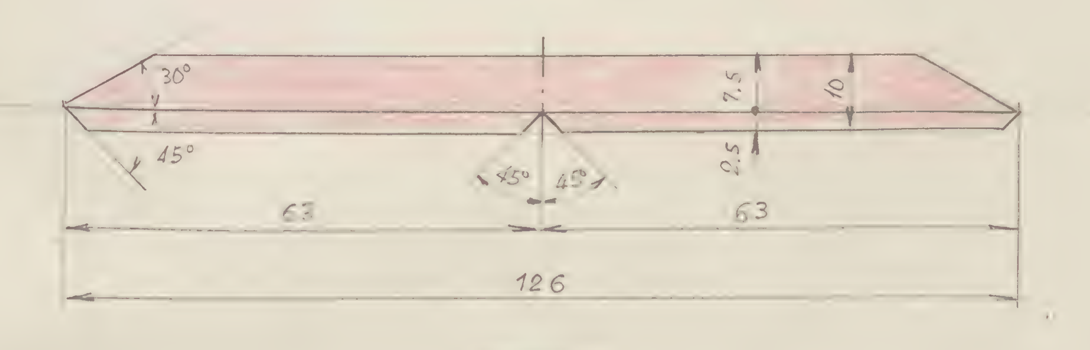
PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Su longitud se deduce del triángulo DEF de la figura 2 (radio de su circunferencia circunscrita)



PIEZA Nº 3 16 (U)
(simétricas 2 a 2)

Fig. 3



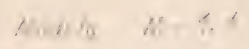
PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_4 (ver fig. 1 ; a_4 = 124.3 m m).- La tomamos igual a 123 m m.

UNE A 4-210 x 297

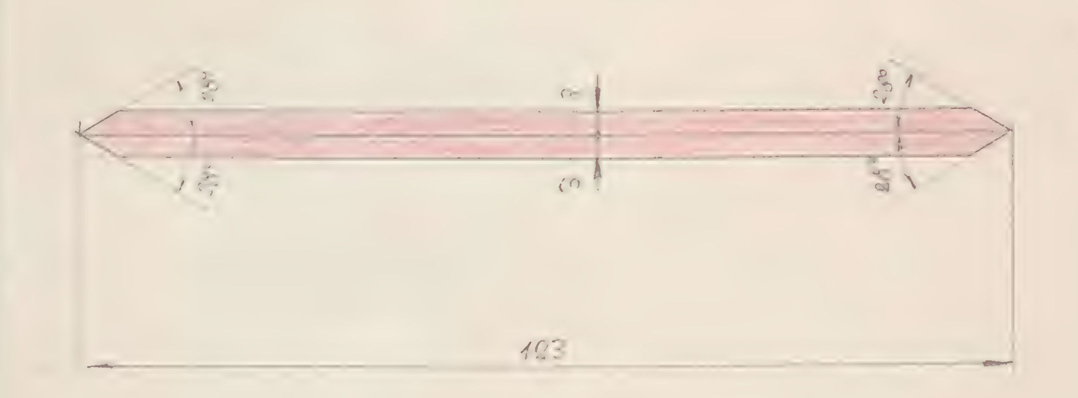
Octubre - 1978





PIEZA Nº 4

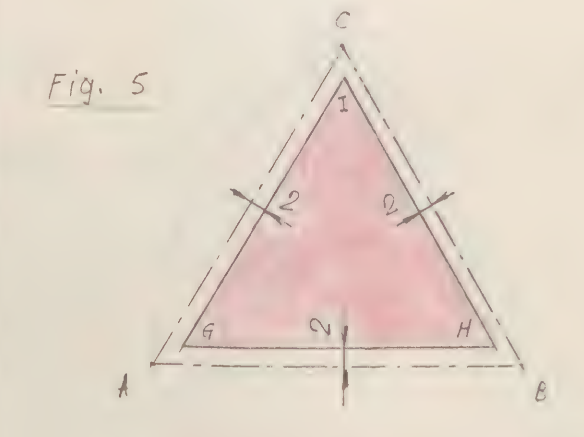
6 unidades



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 4 unidades

Es un triángulo equilátero cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la figura 1 (triángulo GHI de la fig. 5).

Fig. 5



PIEZA Nº 5 4 (u)

Fig. 5

UNE A 4-210 x 297

Octubre - 1978



PIEZA Nº 3 16 (U) (simétricas 2 a 2)

Fig. 3

PIEZA Nº 1

Fig. 1

4 (U)

PIEZA Nº 5

Fig. 5

4 (U)

PIEZA Nº 4 6 (U) Fig. 4

E B

63

PIEZA Nº 2

Figuras 2 + 3

63 m*

F A 1

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-1.101

TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, representado en la lámina 1 del ejercicio G.E.

DATO: Radio "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita al tetraedro regular pedido:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

Las características del tetraedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 4$
Número de vértices	$V = 4$
Número de aristas	$A = 6$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_3$

El modelo que se estudia es de caras macizas.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son triángulos equiláteros cuyo lado "l_3" es igual a la arista

Modelo M-1.101

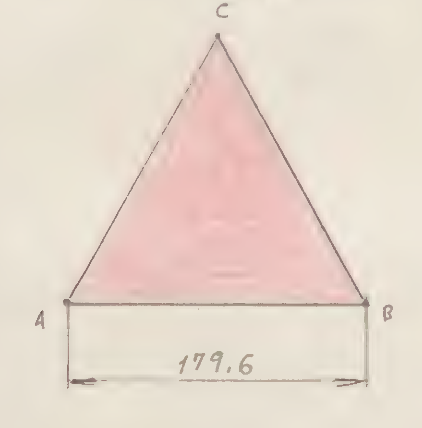
a_4 del tetraedro regular pedido.

Su valor se obtiene despejando a_4 de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_4} = r_{ec}^4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{ec}^4 \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$$

$$= r_{ec}^4 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \cong 1,63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots \times 110 \cong \boxed{179,6 \quad mm}$$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1.



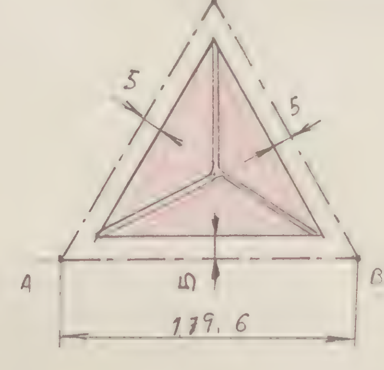
PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2, y se deducen del triángulo ABC de la figura 1



PIEZA Nº 2 4 (u)

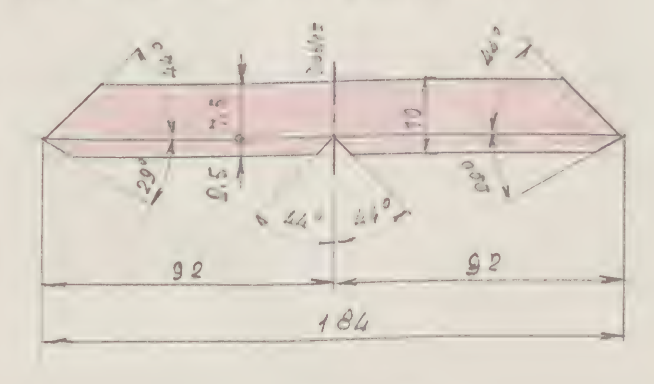
Figura 2

Figura 2



PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo ABC de las caras superficiales (fig. 2) y en forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

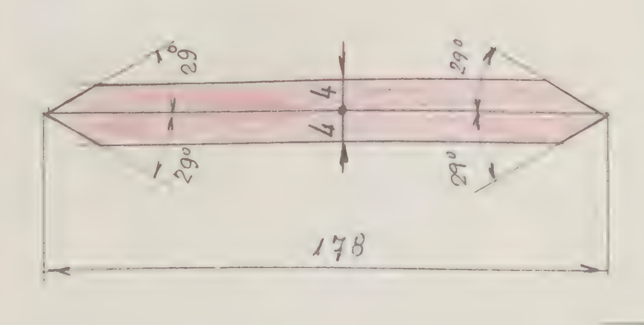


PIEZA Nº 3 12 unidades (simétricas 2 a 2)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades



PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

4 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1

PIEZA Nº 5 4 (u) Figura 5

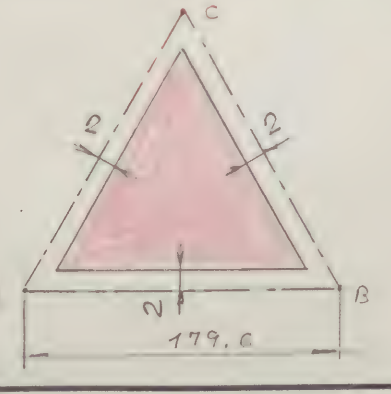


Figura 5

UNE A 4-210 x 297

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-1.102

TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, representado en la lámina 1 del ejercicio GE.

DATO: Radio "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita al tetraedro regular pedido.

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es el de caras vaciadas, variante del modelo M-1.101, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 4$
Número de vértices	$V = 4$
Número de aristas	$A = 6$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_3$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado l_3 es igual al de la arista a_4 del tetraedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_4 de la fórmula nº del

ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4 \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a_4} = r_{ec}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{ec}^{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$$

$$= r_{ec}^{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \simeq 1,63\ 29\ 93\ 16\ 2\ldots \times 110 = \boxed{179,6 \text{ mm}}$$

La forma y dimensiones se representan en la figura 1

C

4 4 4

A B

179,6

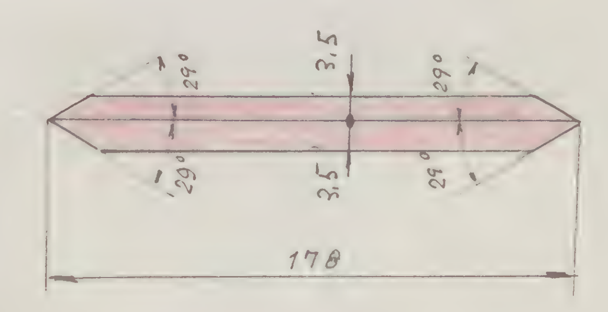
PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_4 = 179,6 mm. La tomaremos igual a 178 mm.



PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2

Figura 2

UNE A 4-210 x 297

Enero 1979



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-1.2

TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 76.1$ mm

Ejercicios de [illegible] de [illegible] MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 1.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, representado en la lámina nº 1 del ejercicio G. E.

DATOS: Radio "r^4_{ec}" de la esfera circunscrita al tetraedro regular pedido.

$$r^4_{ec} = 76.1 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M - 1.1 y de las mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 4$
Número de vértices	$V = 4$
Número de aristas	$A = 6$
Número de caras de cada vértice	$3\ P_3$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado l_3 es igual a la aris-



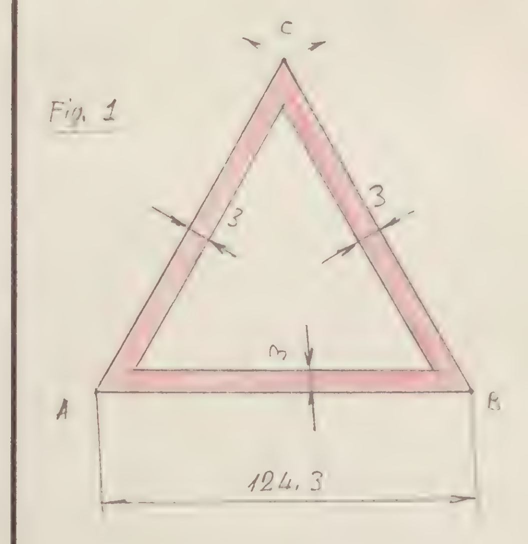
[illegible] a_4 de tetraedro regular [illegible]

Su valor se obtiene despejando a_4 de la fórmula nº del ejercicio G. E. [illegible]:

$$r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4 \qquad \text{de donde: } \boxed{a_4} = r_{ec}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{ec}^{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$$

$$= r_{ec}^{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \cong 76,1 \times 1,63\;29\;93\;16\;2 \cong 124,27\;07\;79\;6\ldots$$

$\boxed{\cong 124.3 \text{ mm}}$



PIEZA N° 1 4 (u)

Figura 1

PIEZA N° 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_4. (ver fig. 1; a_4 = 124.3 mm). La tomamos igual a 123 mm

PIEZA N° 2

Fig. 2

6 (U)

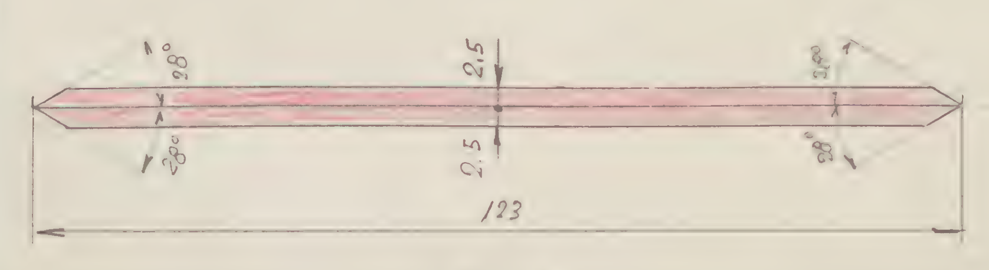


Fig. 2

Álvarez Octubre 1978





PIEZA Nº 2 6 (u)

Fig. 2

EJECUTADO

TETRAEDRO REGULAR CONVEXO

MODELO CORPÓREO QUE REPRESENTA LA TRUNCADURA DE LOS VÉRTICES DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA MITAD DE LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL MISMO.- POLIEDRO RESULTANTE: UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA $a_8 = \frac{a_4}{2}$.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo que se obtiene por truncadura de los vértices de un tetraedro regular convexo, a la mitad de la longitud de la arista de éste.

Si se unen de dos en dos los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular convexo, se obtienen ocho segmentos rectilíneos iguales, que son las aristas de un octaedro regular convexo de arista a_8, mitad de la a_4 del tetraedro, o sea

$$a_8 = \frac{a_4}{2} \qquad (1)$$

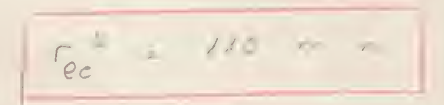
Por consiguiente, el octaedro regular convexo puede ser obtenido del tetraedro regular convexo, por "truncadura de los vértices de dicho tetraedro", lo cual se consigue al cortar los cuatro ángulos sólidos del tetraedro, por planos perpendiculares a la altura que pasa por cada vértice, y a la mitad de la arista del mismo.

Al realizar estos cortes, irán apareciendo sucesivamente en el tetraedro primitivo, cuatro nuevas caras que serán triángulos equiláteros de lado $l_3 = \frac{a_4}{2}$ y en el interior de dicho tetraedro, cuatro nuevas caras triangulares iguales a las anteriores. Al separar las cuatro pirámides seccionadas, el sólido resultante es un octaedro regular convexo.

UNE A 4-210 x 297



DATO: Radio "r_{ec}^4" de la esfera circunscrita al tetraedro regular convexo generador.



$$r_{ec}^4 = 110 \text{ mm}$$

El modelo que se estudia es de caras vaciadas en el tetraedro generador.
El octaedro, procedente de la truncadura del tetraedro generador es de caras macizas.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) TETRAEDRO GENERADOR

La longitud de la arista "a_4" de éste, se obtiene despejando "a_4" de la fórmula nº del ejercicio G.E. (?), o sea:

$$r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_4} = r_{ec}^4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{ec}^4 \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$$

$$= r_{ec}^4 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \cong 1,63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots \times 110 \cong \boxed{179,6 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1

UNE A 4-210 x 297



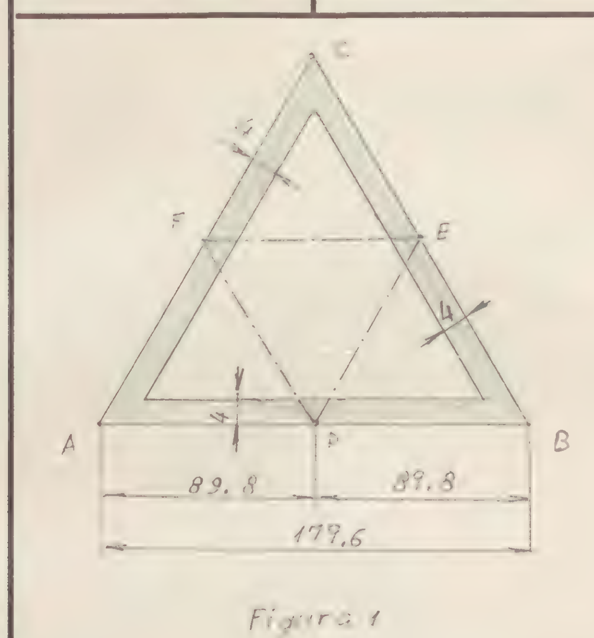


Figura 1

Marcar los puntos D, E y F vértices del octaedro para la situación de éste.

PIEZA Nº 1   4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2   UNIONES ARISTAS   6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

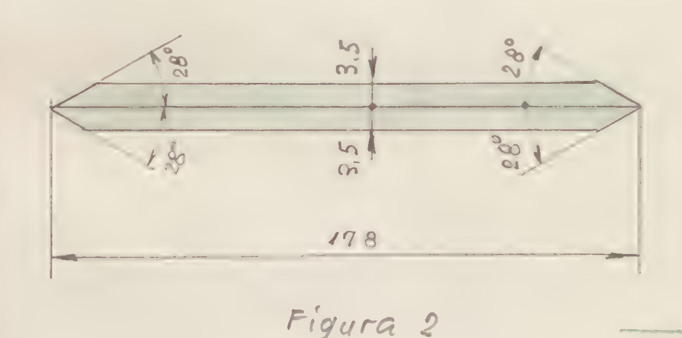


Figura 2

PIEZA Nº2   6 (u)

Figura 2

2.) OCTAEDRO REGULAR.- Arista $a_8 = \frac{179.6}{2} = 89.8$ mm



PIEZA Nº 3   CARAS SUPERFICIALES   8 unidades

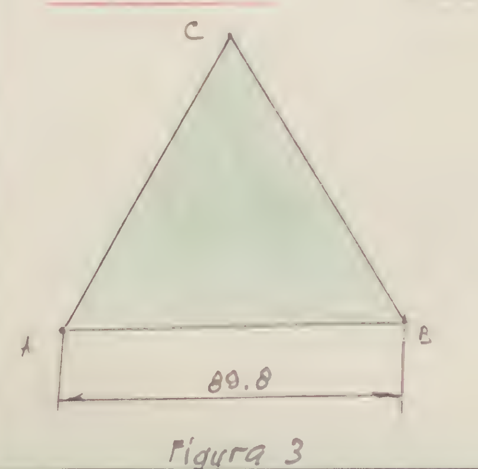


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3   8 (u)

Figura 3

Febrero 1979



PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 8 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo equilátero ABC; de la figura 3

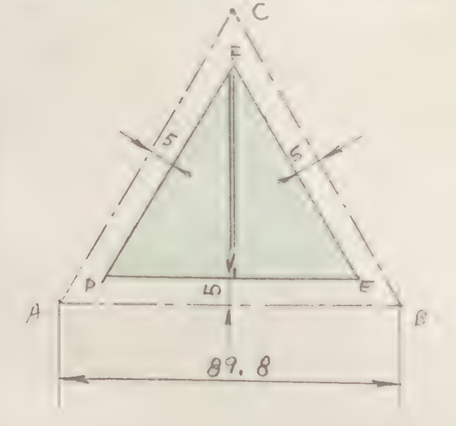


Figura 4

PIEZA Nº 4 8 (U)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5

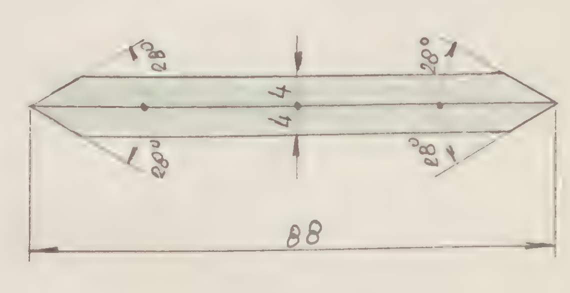


Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (U)

Figura 5

(simétricas 2 a 2)

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 16 unidades

Se colocan en la dirección de la altura del triángulo DEF (Fig. 4)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

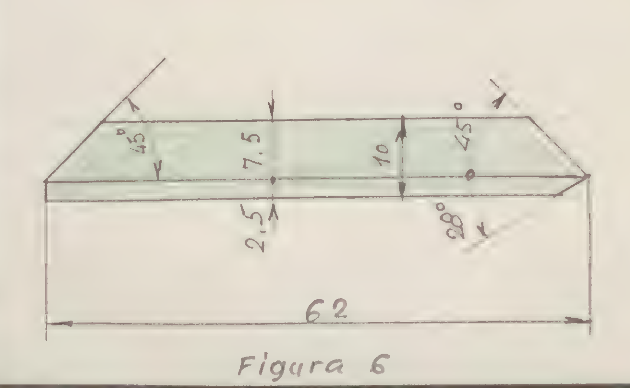


Figura 6

PIEZA Nº 6 16 (U)

Figura 6

Febrero 1979



PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 8 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triangulo ABC de la figura 3, y se representan en la figura 7

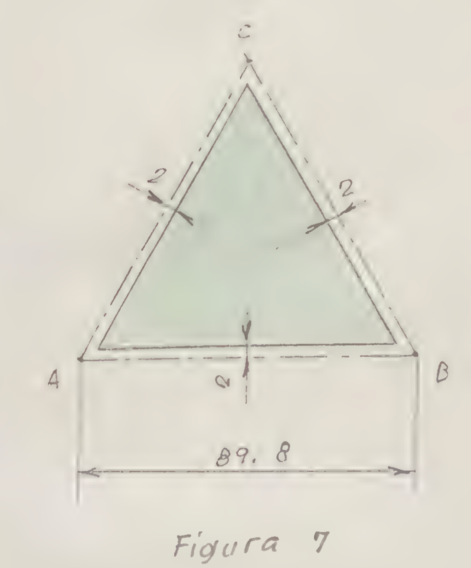


Figura 7

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 7



Variante del modelo M - 1.3

MODELO CORPÓREO QUE REPRESENTA LA TRONCADURA DE LOS VÉRTICES DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA MITAD DE LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL MISMO.- POLIEDRO RESULTANTE: UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA $a_8 = \frac{a_4}{2}$.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$r' = 76.1$ m m.

Variante del modelo M-3.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo que se obtiene por truncadura de los vértices de un tetraedro regular convexo, a la mitad de la longitud de la arista de éste.

El modelo que estudiamos es análogo al estudiado en el modelo M-3.3, con la variante de ser el radio de la esfera circunscrita, de 76.1 mm, menor que el del anterior que era de 110 mm.

Es igualmente de caras vaciadas en el tetraedro generador y de caras macizas en el octaedro que se obtiene por la truncadura de los vértices del primero.

Las dimensiones de este poliedro, se deducen de las del modelo M-3.3, mediante el factor de proporcionalidad o escala de reducción:

$$E = \frac{76.1}{110} = 0.69\overline{18}\ldots$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) TETRAEDRO GENERADOR

PIEZA Nº 1. CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

C, F, E, 3, 3, A, B, D, m, 62.1, 62.1, 124.2

Figura 1

El cálculo de las magnitudes lineales es el siguiente:

1) $89,8 \times 0,69\overline{18} \ldots \cong 62.1$

2) $179,6 \times 0,69\overline{18} \ldots \cong 124.2$

Marcar los puntos D, E, F, vértices del octaedro, para la situación de éste.

PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

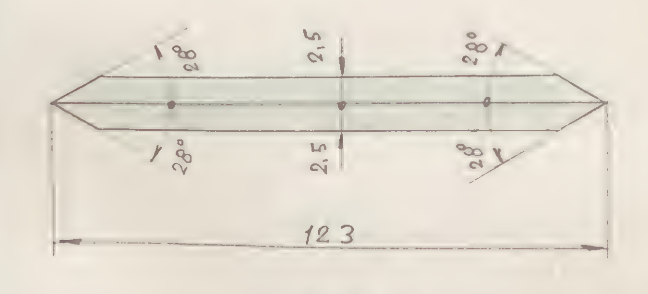


Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (U)

Figura 2

---

2) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

UNE A4 210 x 297

Modelo M-1.4

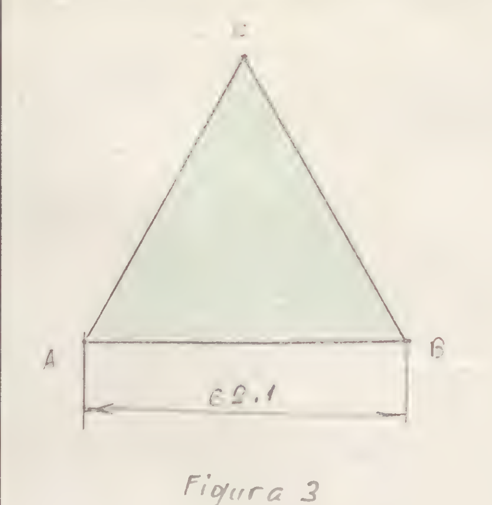


Figura 3

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 8 unidades

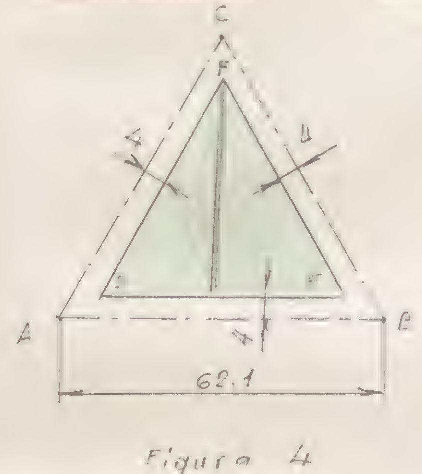


Figura 4

La forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo ABC de la fig. 3

PIEZA Nº 4 8 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

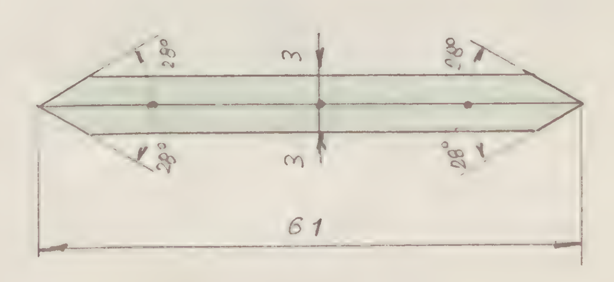


Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

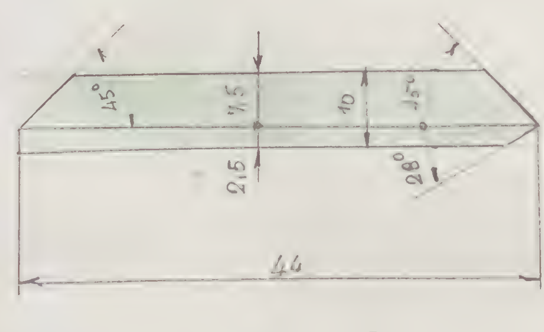


PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR

16 unidades
(simétricas 2 a 2)

Se colocan en la dirección de la altura del triángulo DEF (fig. 4)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



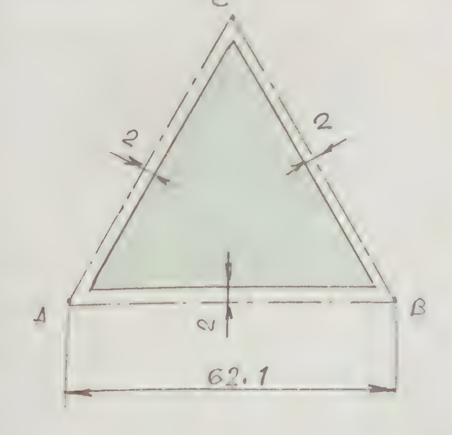
PIEZA Nº 6 16 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se representan en la figura 7



PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 7

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979



MODELO CORPÓREO COMPUESTO

DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS:

1) TETRAEDRO REGULAR CONVE-

XO, INSCRITO EN: 2) EXAE-

DRO REGULAR CONVEXO. ———

Radio de la esfera circunscrita común.

$r' = 110$ m m

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo, compuesto de los siguientes poliedros: 1) Tetraedro regular convexo, inscrito en: 2) Exaedro regular convexo.

En este modelo se pone de manifiesto la propiedad de ser "el tetraedro regular convexo inscriptible en el exaedro regular convexo, cuando ambos tienen sus centros coincidentes y de igual radio sus respectivas esferas circunscritas" $(r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6})$.

DATO:

El único dato para su construcción es el de

$r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6}$ = Radio de la esfera circunscrita común:

$$r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

Los poliedros componentes son de las siguientes características constructivas;

1) Tetraedro regular convexo de caras macizas, y

2) Exaedro regular convexo de caras vaciadas

Para la construcción de los mismos se precisan las siguientes piezas:



Modelo M- 1.5

1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que los del modelo M- 1.101

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M.- 1.101

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M- 1.101

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 del modelo M- 1.101

PIEZA Nº 4 UNIONES A DISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 del modelo M- 1.101

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 5 del modelo M- 1.101

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1979



2) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M - 2.102

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M - 2.102

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M - 2.102

OBSERVACIONES El tetraedro regular convexo, inscrito en el exaedro regular convexo, está colocado en el interior de éste, de forma que cada arista del tetraedro es coincidente con una diagonal de cada cara del exaedro. Como cada cara cuadrada de éste tiene dos diagonales, existe otro tetraedro distinto al anterior inscriptible en el exaedro, ocupando sus aristas la posición de las segundas diagonales de las caras cuadradas.

Estos dos tetraedros son conjugados por sus aristas y forman en su conjunto el poliedro cóncavo estudiado en los modelos M - 12.1, M - 12.2 y M - 12.3. Por consiguiente, tendremos que: "El poliedro cóncavo obtenido por la intersección de dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas, es inscriptible en el exaedro regular convexo"

[signature] Marzo 1979



Variante del modelo M-1.5

MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: 1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN: 2) EXAEDRO REGULAR CONVEXO. ———

Radio de la esfera circunscrita común:

r' = 76,1 mm.

UNE A4·210 x 297

Variante del modelo M - 1.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo, compuesto de los siguientes poliedros: 1) Tetraedro regular convexo, inscrito en: 2) Exaedro regular convexo.

Este modelo es análogo al estudiado en M - 1.5, pero con la variante de ser de menor tamaño (r_{ec}^{4} = 76.1 mm).

DATO: r_{ec}^{4} = Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{4} = 76.1 \text{ mm}$$

Los poliedros componentes son de las siguientes características constructivas:

1) Tetraedro regular convexo, de caras macizas, y

2) Exaedro regular convexo, de caras vaciadas

Para la construcción de los mismos se precisan las siguientes piezas:

1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M - 1.1

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M - 1.1

UNE A4 210 x 297

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-1.1

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 del modelo M-1.1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 del modelo M-1.1

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 5 del modelo M-1.1

---

2) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-2.2

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-2.2

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-2.2

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CUYAS ARISTAS SON IGUALES A LAS DEL TETRAEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO.- Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras [illegible], obtenido al construir sobre cada cara de un tetraedro regular convexo, y hacia su exterior, un tetraedro regular convexo, cuyas aristas son iguales a las del tetraedro generador.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ec}^{4}" de la esfera que contiene a los vértices de los cuatro tetraedros regulares convexos construidos sobre cada cara del tetraedro generador.

DATO: Radio máximo "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita al poliedro pedido:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ m m}$$

1) PROPIEDADES

De la definición de la generación del poliedro estudiado, deducimos las propiedades más importantes del mismo, algunas de las cuales son básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) El poliedro se compone de cuatro tetraedros regulares convexos e iguales, cuyas bases son triángulos equi-

UNE A4 210 x 297



láteros, (caras del tetraedro generador), y sus caras laterales son también triángulos equiláteros. Estos tetraedros tienen las aristas de sus bases, comunes dos a dos.

P2) El número "C" de sus caras, es:

$$C = 3 \times 4 = 12 \quad (4)$$

El número "V" de sus vértices, es:

a) Vértices del Tetraedro generador = 4

b) Vértices de los tetraedros = 4

Total = 8 (1)

El número "A" de sus aristas es

$$A = \frac{C \times 3}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = 18 \quad (4)$$

Observemos que aun siendo cóncavo este poliedro, verifica también el teorema de Euler, para los convexos:

$$C + V = A + 2 \quad " \quad 12 + 8 = 18 + 2$$

P3) El radio "r_{ec}^4" de la esfera circunscrita, es igual a la suma del radio "r_{ei}^4" de la esfera inscrita al tetraedro generador de arista "a_4", y de la altura "h_4" del tetraedro correspondiente de igual arista "a_4"; por consiguiente será:

$$r_{ec}^4 = r_{ei}^4 + h_4 \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297

Calvarro Marzo 1980



P 4) Todas las caras de este poliedro, son iguales entre sí, y en forma de triángulos equiláteros de lado "l_3" igual a la arista "a_4" del tetraedro generador.- ($l_3 = a_4$).

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, vamos a hacer uso de ellas para aplicarlas al cálculo analítico de las magnitudes lineales, necesarias para la construcción del poliedro estudiado.

Como fórmulas previas, deducidas de otros ejercicios, recordemos las siguientes:

1ª "h_4" = Altura de los tetraedros regulares convexos, construidos sobre cada cara del tetraedro regular convexo generador, de arista "a_4"

$$h_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_4 \tag{2}$$

(Ver ejercicio G.E.... lám. 1)

2ª "r_{ei}^4" = Radio de la esfera inscrita en el tetraedro regular convexo generador:

$$r_{ei}^4 = \frac{\sqrt{6}}{12} a_4 \tag{3}$$

(Ver ejercicio G.E. ... lám. 1)

UNE A4 210 x 297



Sustituyendo los valores (2) y (3) en (1), tendremos:

$$r_{ec}^{4} = r_{ei}^{4} + h_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} a_4 + \frac{\sqrt{6}}{3} a_4 = \left[\frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right] a_4 = \frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}}{12} a_4 =$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{12} a_4$$ de donde se obtiene finalmente:

$$r_{ec}^{4} = \frac{5\sqrt{6}}{12} a_4 \qquad (4)$$

Como el dato del ejercicio es "r_{ec}^{4}" para obtener "a_4" en función de r_{ec}^{4}, despejaremos en (4) el valor de "a_4", por lo que tendremos:

$$a_4 = r_{ec}^{4} : \frac{5\sqrt{6}}{12} = \frac{12}{5\sqrt{6}} \times r_{ec}^{4} = \frac{12\sqrt{6}}{30} r_{ec}^{4} = \frac{2\sqrt{6}}{5} r_{ec}^{4}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{5} r_{ec}^{4} \qquad (5)$$

Aplicando la fórmula (5) al caso estudiado, para $r_{ec}^{4} = 110$ mm, tendremos:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{5} r_{ec}^{4} = 0,97\,97\,95\,89\,7 \ldots \times 110 = 107,8 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:



Modelo M- 1.7

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE CADA UNO DE LOS CUATRO TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS.

4 unidades

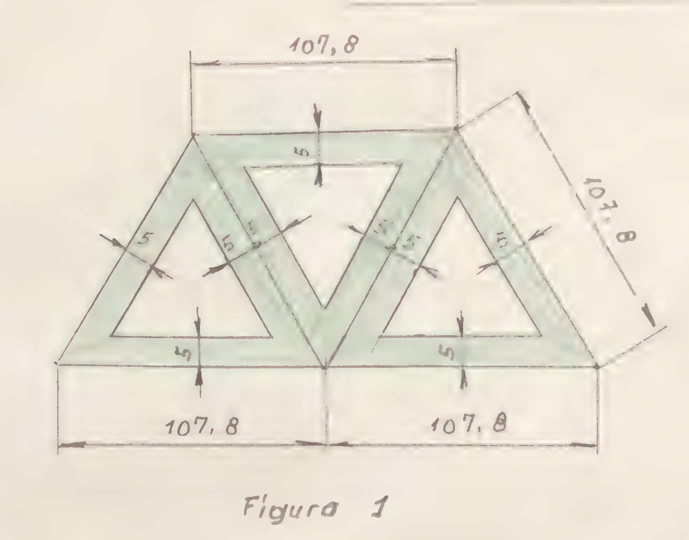


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 18 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

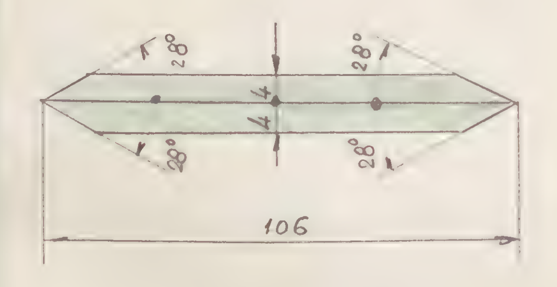


Figura 2

PIEZA Nº 2 18 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

12 unidades

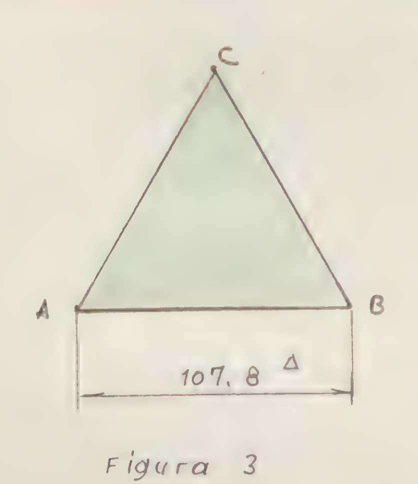


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1980



Modelo M - 1.7

PIEZA Nº 4 REFUERZO TRANSVERSAL CARAS LATERALES

12 unidades

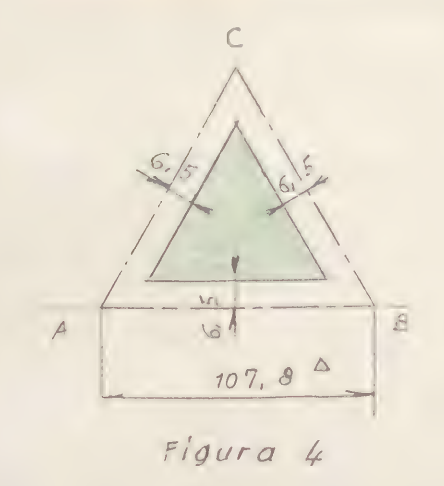


Figura 4

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3.

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES

36 unidades

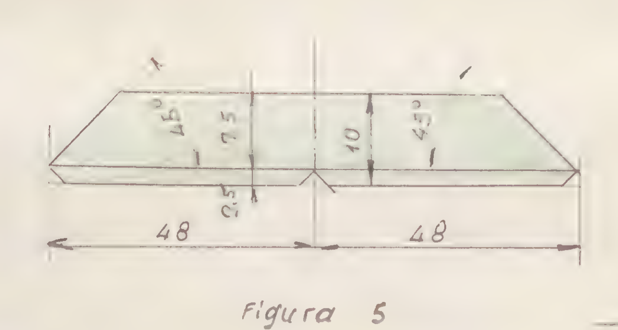


Figura 5

PIEZA Nº 5 36 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

12 unidades

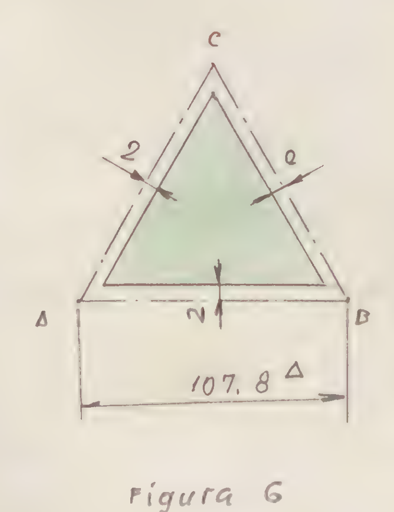


Figura 6

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura nº 3.

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6



ESTUDIO COMPLEMENTADIO

El estudio de este modelo, cuya ley de generación se detalla en el enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de cuatro tetraedros regulares convexos acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro son todas de igual longitud, e iguales a su vez a las del tetraedro regular convexo generador "a_4".

Los vértices exteriores son puntos que equidistan del centro "O" del tetraedro generador (por ser la altura de los tetraedros regulares, perpendiculares a las respectivas caras del mencionado tetraedro generador, y por lo tanto, pasar por el centro de dichas caras.).

Así pues, dichos vértices están sobre una esfera común, circunscrita al poliedro estudiado y son a su vez vértices de un tetraedro regular convexo circunscrito a aquél. (Este tetraedro circunscrito y el tetraedro generador son conjugados entre sí, y sus aristas se cruzan perpendicularmente dos a dos).

En el estudio del tetraedro regular convexo (Ver G.E... Lámina 1), obtuvimos la fórmula

$$r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a_4 \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Marzo 1980



que nos da el valor de la longitud del radio "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita al tetraedro regular convexo, en función de su arista "a_4", en la cual, despejando "a_4", podemos obtener la arista en función de "r_{ec}^{4}". Así pues, tendremos:

$$a_4 = r_{ec}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{4}{\sqrt{6}} \times r_{ec}^{4} = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{4} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4} \simeq 1{,}63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots\ r_{ec}^{4}$$

que en el poliedro estudiado, será:

$$a_4 \simeq 1{,}63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots \times 110 = 179{,}6\ mm$$

Para obtener el poliedro resultante de este estudio complementario, puede utilizarse este mismo modelo M-1.7, completándolo con las aristas "a_4" de las caras del tetraedro regular convexo. Ello ha sido realizado de este modelo.

UNE A4:210 x 297

Alvarez   Marzo 1980



MODELOS M - 1.7
Y M - 1.9

PATRONES



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-1.7, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, PERO DE MENOR TAMAÑO, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 76,1 mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un tetraedro regular convexo, y hacia su exterior, un tetraedro regular convexo, cuyas aristas son iguales a las del tetraedro generador.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-1.7, de igual forma, siendo menor el radio de su esfera circunscrita (r_{ce} = 76,1 mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho para el modelo M-1.7, determinando el coeficiente "k" de reducción, k = 76,1 : 110, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ce} = 76{,}1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76{,}1}{110} = 0{,}69\widehat{18}$$



A continuación presentamos diversas tablas de longitudes reseñadas en las figuras del modelo M-1.7, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-1.8, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE CADA UNO DE LOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, DEL CONTORNO. 4 (u)

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas
PIEZA Nº 1 4 (u)	107,8 5	74,6 4

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 18 (u)

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 18 (u)	106 4 28°	73 3 28°



PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 12 (u)

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 12 (u)	107.8	74.6

PIEZA Nº 4 REFUERZO TRANSVERSAL CARAS LATERALES 12 (u)

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	107.8	74.6
12 (u)	6.5	5.5

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES 24 (u)

La figura nº 5 del ejercicio M-1.7, queda sustituida por la siguiente: (fig. 1).

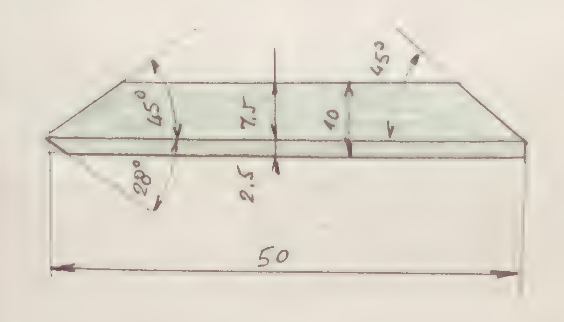


Figura 1

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 1

Calvario Marzo 1980



		Modelo M.1.8

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

12 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	107.8	74.6
12 (u)	2	2

Arista "a_4" del tetraedro regular convexo que se obtiene al unir los vértices del poliedro estudiado:

$$a_4 = 124.3 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

[firma] Marzo 1980



VÁRIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M- 1.7, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUIDO: A) EL TETRAEDRO GENERADOR, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

UNE A4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 1.9

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M - 1.7, de igual forma y dimensiones, y construído: A) El tetraedro regular convexo generador, con sus caras macizas; y B) El tetraedro regular convexo con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 1.7.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS Y ARISTA $a_4 = 107,8$ mm

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

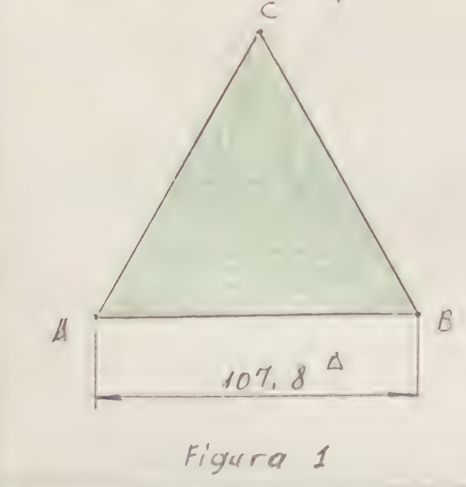


Figura 1

PIEZA Nº 1

4 (u)

Figura 1

Alvarez Marzo 1980



PIEZA Nº 2 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 4 unidades

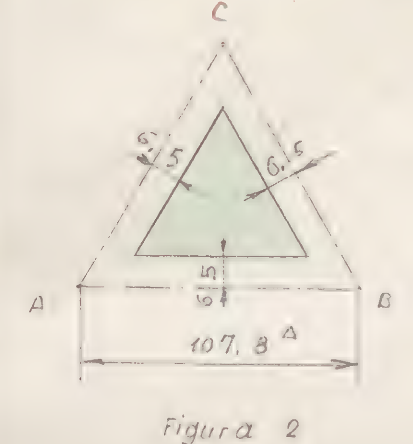


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 4 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

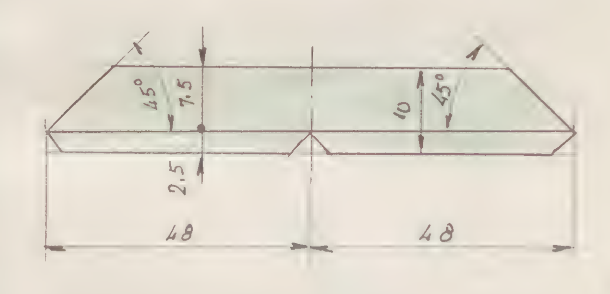


Figura 3

PIEZA Nº3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

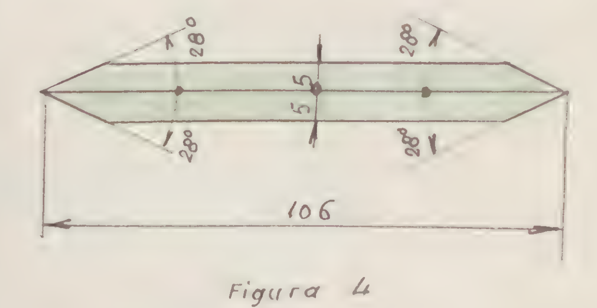


Figura 4

PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 4

Marzo 1980



Modelo M-1.9

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 4 unidades

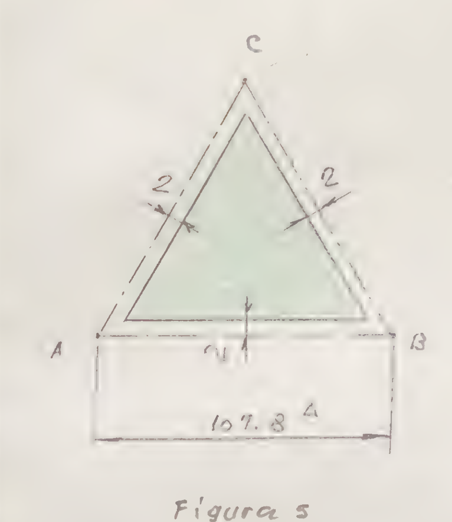


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la fig. 5

PIEZA Nº 5 4 (u)

Figura 5

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS DE ARISTA $a_4 = 107,8$ mm

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO. 4 unidades

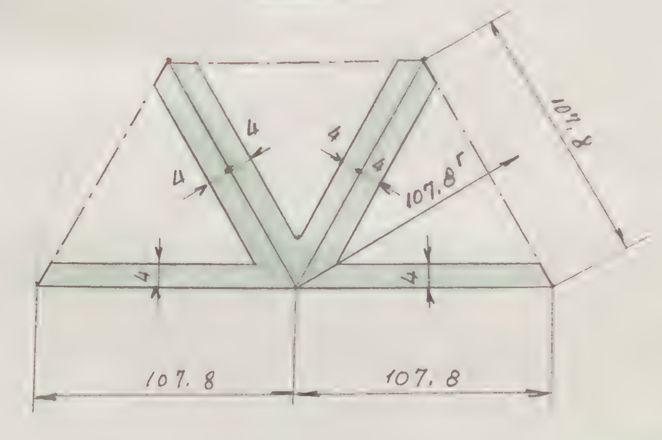


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la fig. 6

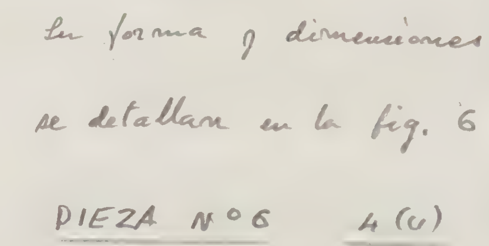

PIEZA Nº 6 4 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

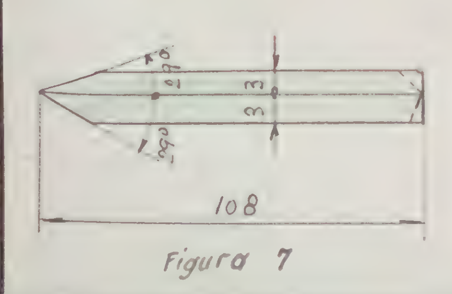


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Álvarez Marzo 1980



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-1.9, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, PERO DE MENOR TAMAÑO, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un tetraedro regular convexo (generador), y hacia su exterior, un tetraedro regular convexo cuyas aristas son iguales a las del tetraedro generador.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-1.9, de igual forma y ~~dimensiones~~, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho para el modelo M-1.7, determinando el coeficiente "k" de reducción, $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec} = 76{,}1 \ \text{mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76{,}1}{110} = 0{,}69\widehat{18}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1980



A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-1.9, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-1.10, en el que son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 (u)

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1 4 (u)	107.8	74.6

PIEZA Nº 2 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 4 (u)

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	107.8	74.6
4 (u)	6.5	5.5



Modelo M- 1.10

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL DE CARAS LATERALES 12 (u)

La figura 3 del ejercicio M-1.9, queda sustituida por la siguiente (figura 1).

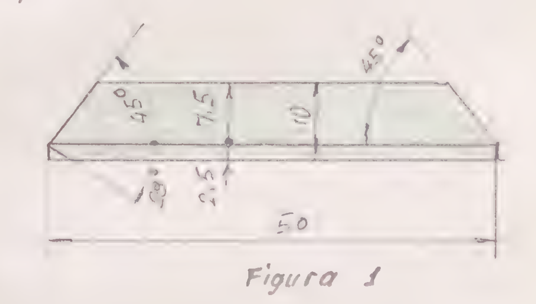


Figura 1

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

La figura 4 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	106	73
6 (u)	5 28°	4 28°

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 4 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	107,8	74,6
4 (u)	2	2

UNE A4 210 x 297

Calvario Marzo 1980



Modelo M - 1,10

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS

La figura 6. ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	107.8	74.6
4 (u)	4	3

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 (u)

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas m
PIEZA Nº 7	108	75
	3	2.5
12 (u)	29º	29º

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1980



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN PRISMA TRIANGULAR, REGULAR RECTO, CUYA BASE ES DICHA CARA, Y SUS CARAS LATERALES SON CUADRADOS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un tetraedro regular convexo, y hacia su exterior, un prisma regular triangular recto, cuya base es dicha cara, y sus caras laterales son cuadrados.

Se tiene como dato único, el del radio "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita, que contiene todos los vértices exteriores (vértices de los triángulos equiláteros de las bases del prisma opuestas a las caras del tetraedro generador).

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

1) PROPIEDADES

De la definición de este poliedro, se deducen las siguientes propiedades, que enunciamos a continuación, siendo algunas de ellas, básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) Los prismas rectos construidos sobre cada cara del tetraedro generador, son de bases triangulares, equiláteros, siendo a su vez cuadradas las caras laterales; por consiguiente, dichos prismas serán rectos, triangulares, regulares y convexos, siendo sus aristas



		Modelo M- 1.11

iguales a la "a_4" del tetraedro generador.

P. 2). El poliedro pedido, se compone de cuatro prismas rectos triangulares, regulares y convexos, que tienen las aristas "a_4" de sus bases inferiores, comunes dos a dos.

P. 3). El número de sus caras, será:

$C_3 = 1 \times 4 = 4$ caras triangulares

$C_4 = 3 \times 4 = 12$ caras cuadradas

Total $= 16$ caras

El número de sus vértices, será:

En las bases superiores: $= 3 \times 4 = 12$

en las bases inferiores $= 4$

Total ... $= 16$ vértices

El número de aristas, será:

En las bases superiores $= 3 \times 4 = 12$

En las bases inferiores $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

En las caras laterales $= 3 \times 4 = 12$

Total ..... $= 30$ aristas

En resumen, este poliedro tiene:

C = 16 caras
V = 16 vértices
A = 30 aristas

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1980



		Modelo 11-1.11

y verifica también el teorema de Euler para poliedros convexos:

$$C + V = 16 + 16 = 32 = A + 2 = 30 + 2$$

P. 4.) La altura "h_3" del prisma recto, regular, triangular, construido sobre cada cara del tetraedro generador de arista "a_4", es:

$$\boxed{h_3 = a_4} \qquad (1)$$

P. 5). Si unimos un vértice "V" de la base superior del prisma recto anterior, con el centro "C" del triángulo de dicha base; a continuación éste con el centro "O" del tetraedro generador, y finalmente "V" con "O", se nos formará el triángulo VCO, rectángulo en "C", en el que la hipotenusa "VO" será el radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado; el cateto "VC" será el radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita a la cara triangular anterior; el otro cateto "CO" es la suma del radio "r_{ei}^4" de la esfera inscrita en el tetraedro generador, y la altura "h_3" del prisma. Así pues, será:

$$\overline{VO} = r_{ec} \; ; \quad \overline{VC} = r_{c-3} \quad y \quad \overline{CO} = r_{ei}^4 + h_3$$

verificándose que:



$$\overline{VO}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CO}^2 \qquad (2)$$

y sustituyendo valores será:

$$r_{ec} = \sqrt{(r_{c-3})^2 + (r_{ei}^4 + h_3)^2} \qquad (3)$$

Para desarrollar la fórmula (3), sustituiremos en ella los siguientes valores en función de "a_4":

1º "r_{c-3}" = Radio de la circunferencia circunscrita a la base triangular exterior del prisma recto, de lado $l_3 = a_4$

$$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a_4 \qquad (4)$$

(Ver ejercicio G.P. 1.400 - 42)

2º "r_{ei}^4" - Radio de la esfera inscrita al tetraedro generador, en función de su arista "a_4"

$$r_{ei}^4 = \frac{\sqrt{6}}{12}\, a_4 \qquad (5)$$

(Ver ejercicio G.E. ___ .- Lám. 1)

$$h_3 = a_4 \qquad (6)$$

Sustituyendo en (3) los valores (4), (5) y (6), tendremos:

$$r_{ec} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_4\right)^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\, a_4 + a_4\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{6}}{12} + 1\right]^2}\, a_4 =$$

Abril 1980



Modelo M- 1.11

$$= \sqrt{\frac{3}{9} + \left(\frac{6}{12^2} + 1 + \frac{2\sqrt{6}}{12}\right)}\ a_4 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{24} + 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}}\ a_4 =$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 1 + 24 + 4\sqrt{6}}{24}}\ a_4 = \boxed{\sqrt{\frac{33 + 4\sqrt{6}}{24}}\ a_4}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$r_{ec} = \sqrt{\frac{33 + 4\sqrt{6}}{24}}\ a_4 \qquad (7)$$

Despejando en la fórmula (7) el valor de a_4, tendremos:

$$\boxed{a_4} = r_{ec} : \sqrt{\frac{33 + 4\sqrt{6}}{24}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{33 + 4\sqrt{6}}{24}}} \times r_{ec} = \sqrt{\frac{24}{33 + 4\sqrt{6}}}\ r_{ec} =$$

$$= \sqrt{\frac{24 \times (33 - 4\sqrt{6})}{33^2 - 16 \times 6}}\ r_{ec} = \sqrt{\frac{24 \times (33 - 4\sqrt{6})}{993}}\ r_{ec} = \boxed{\sqrt{\frac{8 \times (33 - 4\sqrt{6})}{331}}\ r_{ec}}$$

$\cong$ 0,74 88 48 72 --- $\times\ r_{ec}$ de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_4 = \sqrt{\frac{8 \times (33 - 4\sqrt{6})}{331}}\ r_{ec}} \qquad (8)$$

La fórmula final (8), nos permite calcular la arista "a_4" del poliedro estudiado, en función del radio "r_{ec}" de su esfera circunscrita (r_{ec} = 110 mm). Con ello podemos construir los polígonos que forman sus caras (triángulos equiláteros y cuadrados de igual lado; $l_3 = l_4 = a_4$).

En el modelo estudiado, será:

$$\boxed{d_4} = \sqrt{\frac{8 \cdot (33 - 4\sqrt{6})}{231}} \times r_{ec} \cong 0,74\ 88\ 48\ 72 \ldots \times 110 \cong$$

$$= \boxed{82,4 \quad m\, m.}$$

Dicho modelo, de caras macizas, se compondrá de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

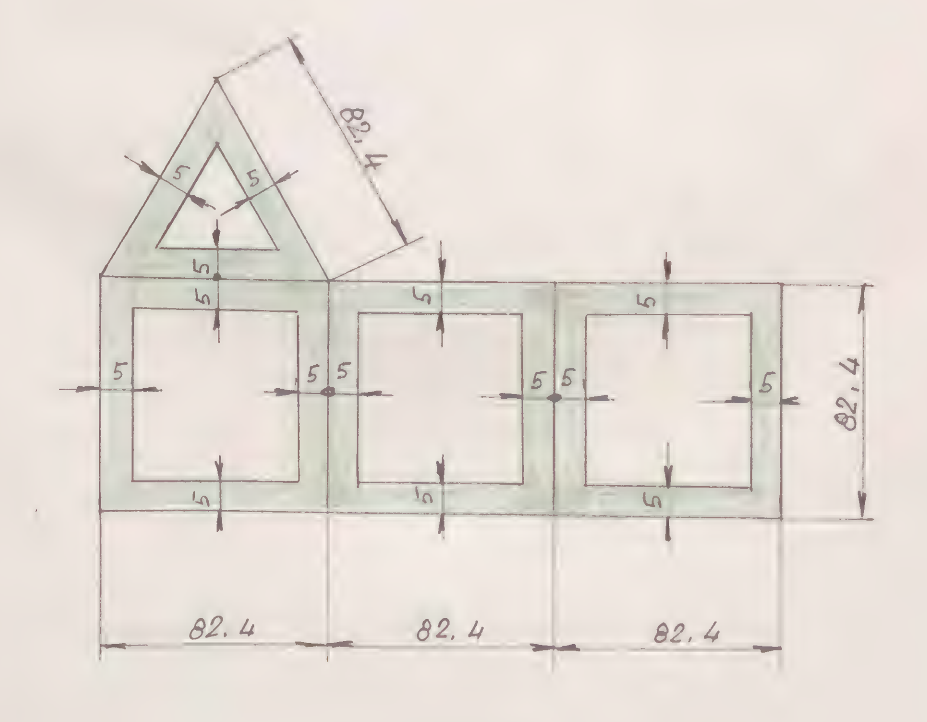


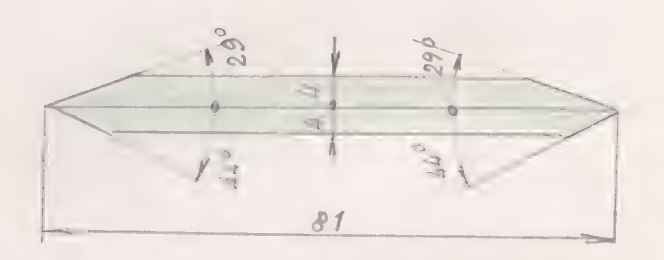
Figura 1

Alvarez Abril 1980



PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2.



PIEZA Nº 2

30 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 12 unidades

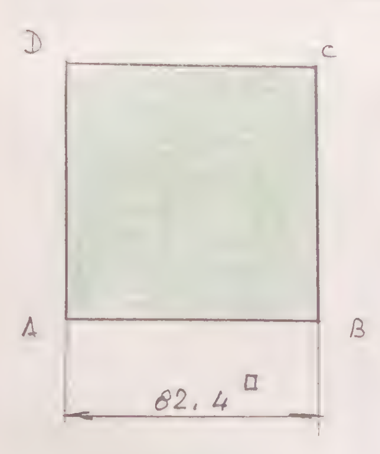


Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 4 unidades



Figura 4

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4 4 (u)

Figura 4

Calvarez Abril 1980



PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR.- 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 7.

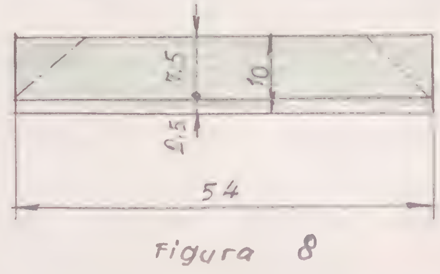


Figura 8

PIEZA Nº 8 8 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 12 unidades

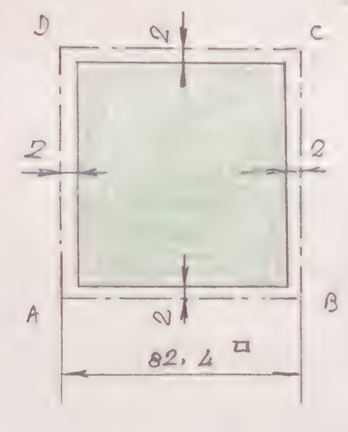


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen del cuadrado ABCD de la figura 3, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 4 unidades.

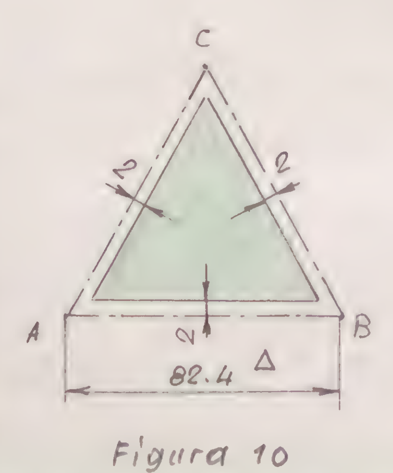


Figura 10

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 4.

PIEZA Nº 10 4 (u)

Figura 10

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1980



		Modelo M - 1.11

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo, cuya ley de generación se detalla en su enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo compuesto de cuatro prismas rectos, triangulares, regulares, acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro, todas de igual longitud e iguales a las del tetraedro generador de arista "a_4", son de dos clases. En la primera se incluyen las correspondientes a las dos bases de cada prisma triangular, y en la segunda, las de las caras laterales de dichos prismas.

En cada arista de las bases superiores, concurren una cara triangular (la propia base superior) y otra cuadrada (cara lateral del prisma), perpendiculares entre sí. En cada arista de las bases inferiores, concurren dos caras cuadradas, y el diedro "2 β" formado por ellas, es suplementario del diedro "2 φ" de dos caras contiguas del tetraedro generador, ya que los respectivos lados de sus rectilíneos correspondientes, son perpendiculares entre sí, por ser las caras laterales de los prismas triangulares, perpendiculares a las del tetraedro generador.

Si unimos ahora convenientemente dos a dos los vértices de los triángulos de las bases superiores de los prismas triangulares, obtendremos cuatro caras triangulares, equiláteras e iguales, asociadas a cada vértice del tetraedro ge-

UNE A4 210 x 297



nerador, y otras seis caras rectangulares asociadas a cada arista del mencionado tetraedro generador.

Estas nuevas caras, juntamente con las de las bases superiores de los prismas triangulares, forman un poliedro convexo de las siguientes características:

a) Caras triangulares regulares (bases superiores de los prismas triangulares) ——— = 4
b) Caras triangulares regulares (asociadas a los vértices del tetraedro generador) de diferente tamaño que las a) = 4
c) Caras rectangulares ——— = 6

Total caras ---- = 14

d) Aristas de las caras a) = $\frac{4 \times 3}{2}$ = 6

e) Aristas de las caras b) = $\frac{4 \times 3}{2}$ = 6

f) Aristas de las caras c) = $\frac{6 \times 4}{2}$ = 12

Total aristas = 24

g) Vértices 3×4 = 12 vértices

Verificándose el teorema de Euler para los poliedros convexos

$C + V = A + 2$ $\qquad 14 + 12 = 24 + 2 = 26$

Alvarez Abril 1980



Las caras triangulares asociadas a los vértices del tetraedro generador, tienen su lado l_3 de mayor longitud que la arista "a_4" de dicho tetraedro, según demostraremos a continuación, o sea

$$\boxed{l_3 > a_4} \qquad (1)$$

En efecto: Las caras rectangulares tienen dos de sus lados iguales a las aristas a_4 (los correspondientes a las caras contiguas a las bases superiores de los prismas triangulares); y los otros dos, iguales a $l_4 < a_4$ (los correspondientes a las caras contiguas triangulares (caras b), asociadas a los vértices del tetraedro generador).

La longitud de la arista "l_3" se deduce del cálculo siguiente, basado en las consideraciones anteriores.

Consideremos la sección recta producida por un plano perpendicular a una arista cualquiera de las bases inferiores del prisma triangular regular, y dada en el extremo de dicha arista.

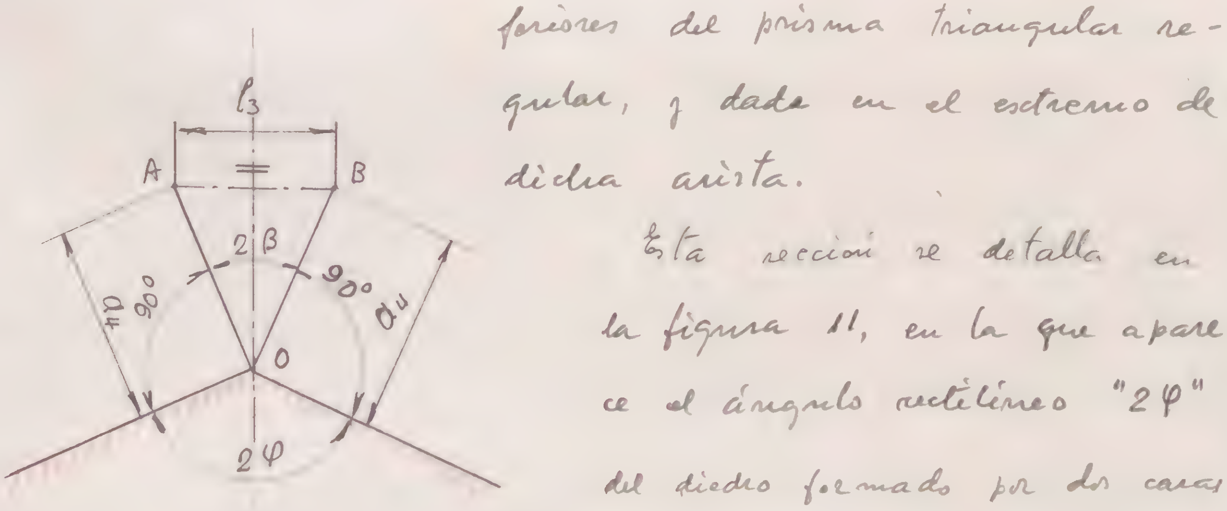


Figura 11

Esta sección se detalla en la figura 11, en la que aparece el ángulo rectilíneo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del tetraedro generador, y las dos aristas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, de dos de los prismas



triangulares regulares que forman el ángulo "2β", rectilíneo de dicho diedro y suplementario del "2φ".

Si tomamos ahora las longitudes $\overline{OA} = \overline{OB} = a_4$, el segmento $\overline{AB}$, será un lado "l_3" de las caras rectangulares, y al mismo tiempo igual al lado de las caras triangulares (no bases de prismas) (ver fórmula (1).

En el estudio del tetraedro regular convexo (ver lámina 1), obtenimos el valor del ángulo φ por la siguiente fórmula:

$$\text{sen } \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{de donde será:}$$

$$\varphi = \text{arc. sen } \frac{\sqrt{3}}{3} = 35°,26\ 43\ 89\ 69... \qquad \text{y de aquí:}$$

$$2\varphi = 70°,52\ 87\ 79\ 38... \qquad \text{por lo que será:}$$

$$2\beta = 180° - 70°,52\ 87\ 79\ 38 = 109°,47\ 12\ 20\ 6$$

$$\beta = 54°,73\ 56\ 10\ 30$$

De la figura 11, se deduce: $\boxed{\overline{AB}} = 2 \times (\overline{AO} \times \text{sen } \beta) =$

$= 2 \text{ sen } \beta \times a_4 = 1.63\ 29\ 93\ 16\ 2 \times 0.74\ 88\ 48\ 72... \times 110 =$

$= 1,22\ 28\ 64\ 83\ 9... \times 110 = \boxed{134,5 \text{ mm}}$

por lo que tendremos finalmente.

$$\boxed{\overline{AB} = l_3 = 1,63\ 29\ 93\ 16\ 2...\ a_4} \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la arista l_3 es mayor que la a_4 (aproximadamente un 63% de a_4)

[signature] Abril 1980



El modelo corpóreo del poliedro convexo que se obtendría como consecuencia de este estudio complementario, podría parecer en principio, análogo al desarrollado en el estudio del Arquimediano III (Lámina 35), compuesto de

(1) 8 caras triangulares equiláteras

(2) 6 caras cuadradas

(3) 12 vértices

(4) 24 aristas.

y concurren en cada vértice: $2 C_3 + 2 C_4$

Las condiciones (1), (3) y (4) se cumplen en el poliedro estudiado, pero no la (2), en el que existen 6 caras rectangulares en lugar de cuadradas.

Tampoco son iguales entre sí todas las aristas (unas tienen la longitud de a_4 y otras la de $l_3 > a_4$

En resumen, el poliedro estudiado en este estudio complementario "no es un Arquimediano III", aun cuando pueda ser confundido a primera vista con éste.

Para obtener este poliedro, puede utilizarse este mismo modelo M - 1.11, completándolo con las aristas "l_3" = 134,5 mm. de las caras rectangulares, que es lo realizado en dicho modelo corpóreo.

UNE A4 210 x 297

Calvares Abril 1980



MODELO M - 1. 11

PATRONES



VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-11, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUÍDO: A) EL TETRAEDRO GENERADOR, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL PRISMA RECTO REGULAR, TRIANGULAR, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.

	Ejercicios de construccion de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-1.12

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del poliedro cóncavo M-1.11, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El tetraedro regular generador, con sus caras macizas; y B) El prisma recto triangular, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-1.11.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS Y ARISTA DE 82,4 mm

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

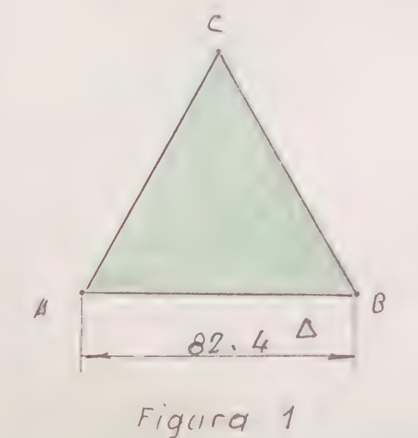


Figura 1

PIEZA Nº 1 4 (4)

Figura 1

Modelo M-1.12

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

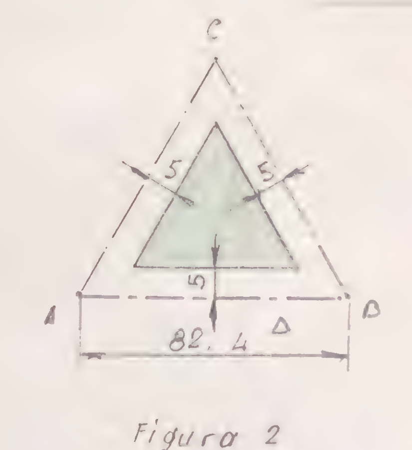


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 2 4 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

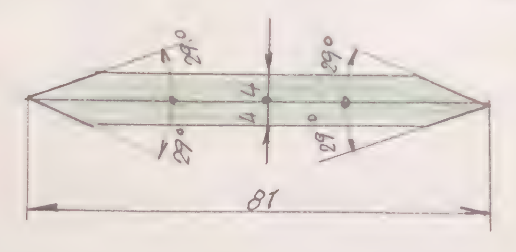


Figura 3

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO 4 unidades

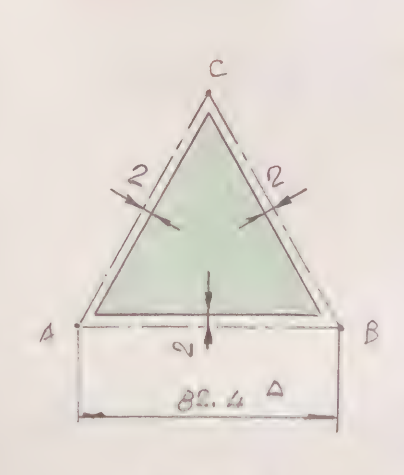


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 4 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Álvarez Abril 1980

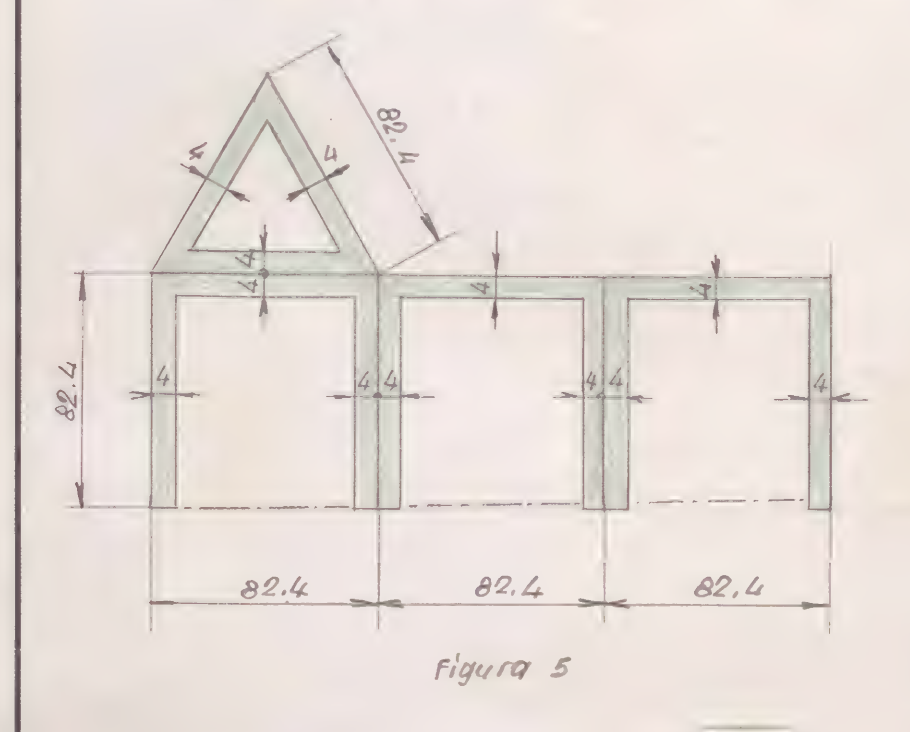


		Modelo M- 1.12

B) PRISMA TRIANGULAR RECTO DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS, DE ARISTA a_3 = 82.4 mm

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



PIEZA Nº 5

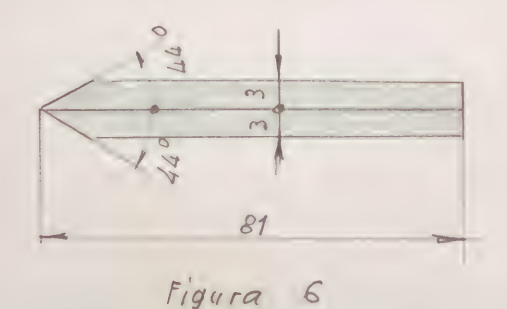
4 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

Figura 6



PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS EN BASES SUPERIORES

12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7

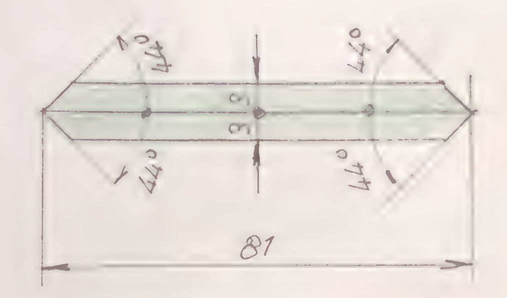


Figura 7

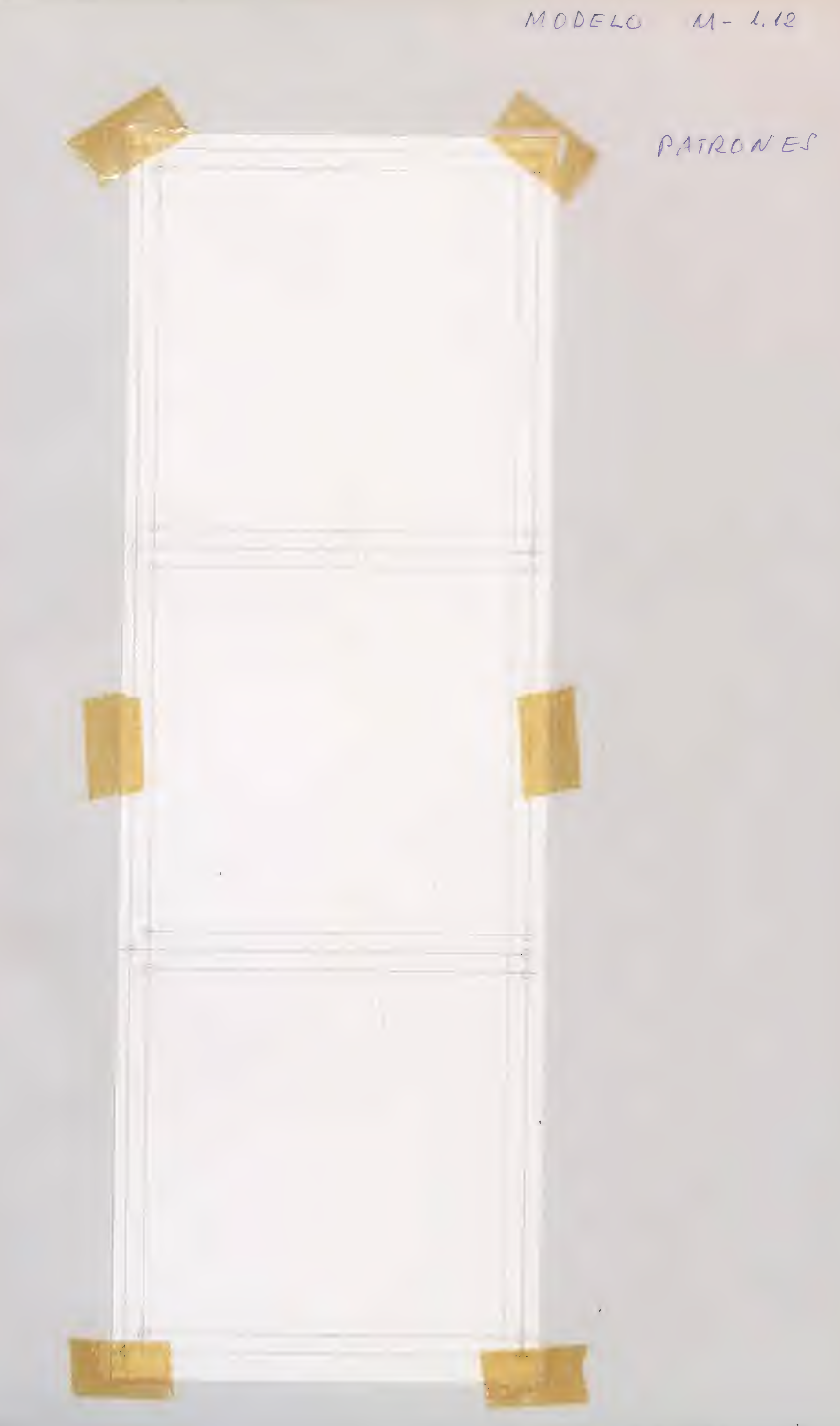
PIEZA Nº 7 12 (4)

Figura 7



MODELO M- 1.12

PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA $x = \frac{2}{3} a_4$, SIENDO $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$, LA LONGITUD DE LA ARISTA "a'_4" DEL TETRAEDRO GENERADO.- EL TETRAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297



ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo generador, de arista "a_4" a la distancia $x = \frac{2}{3} a_4$, siendo $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$ la longitud de la arista "a'_4" del tetraedo generado.- El tetraedro generado se construirá con las caras macizas, y el generador, con las caras vaciadas.

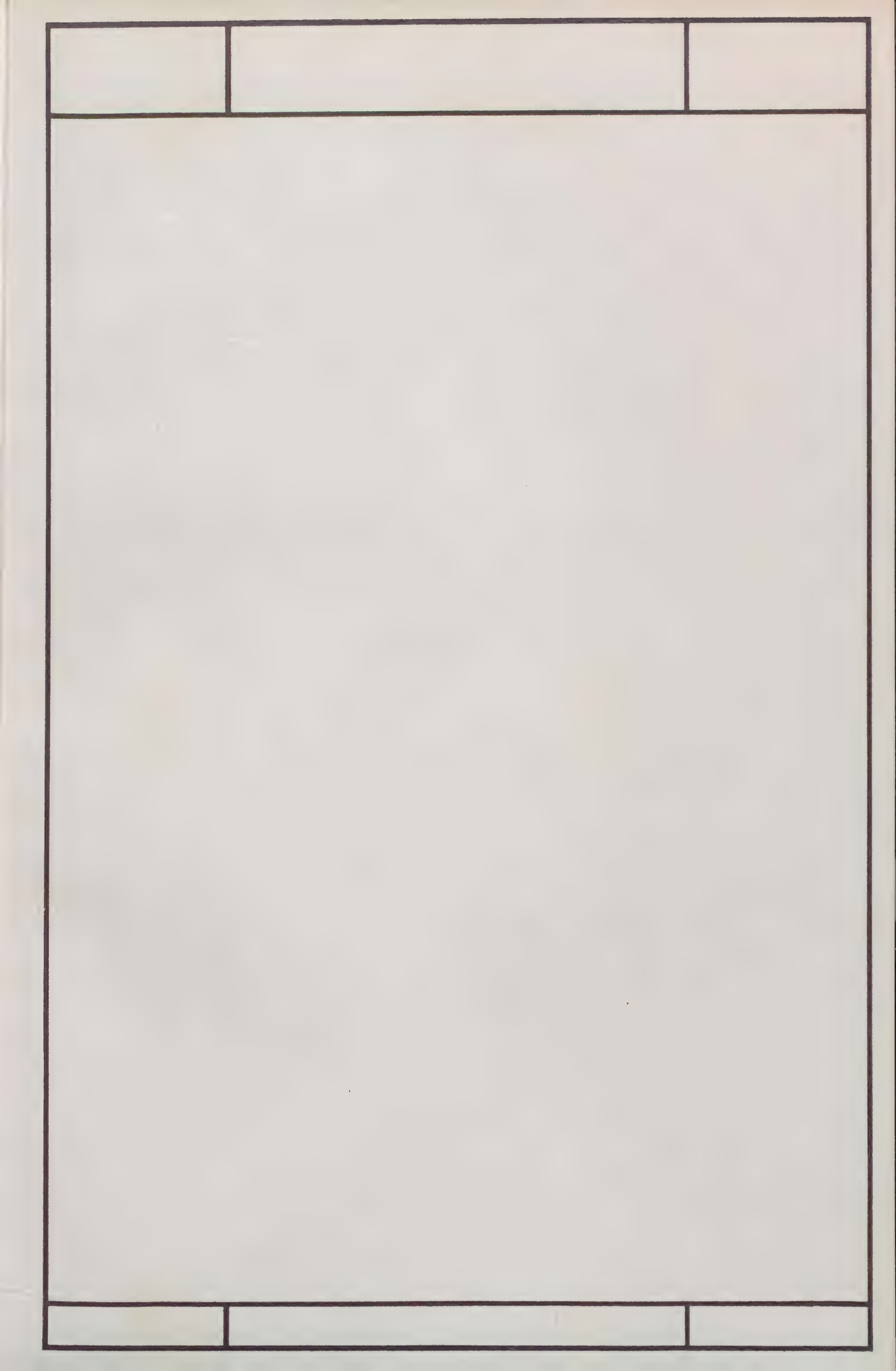
DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$r_{e_c}^{4}$ = 110 m.m

NOTA: Este modelo es igual al M-6.2, por lo que no se ha repetido su ejecución

UNE A4 210 x 297

Tavares   Marzo 1981





EXAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, representado en la lámina [illegible] del ejercicio G.E.

DATOS: Radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo pedido:

$$r_{ec}^{6} = 76,1 \ mm$$

Las características del exaedro regular convexo son las siguientes:

Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices	$V = 8$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	$3 \ P_4$

El modelo corpóreo que se estudia, es de caras macizas.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son cuadrados, cuyo lado l_4 es igual a la arista a_4

UNE A 4-210 x 297



del exaedro regular pedido.

Su valor se obtiene despejando a_6 de la fórmula nº del ejercicio G. E. , o sea

$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$ de donde $\boxed{a_6} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 76.1 \times 1.15\,47\,00\,53\,9 \cong 87,87\,27\,11\,02...$

$\cong \boxed{87.9 \text{ m m.}}$

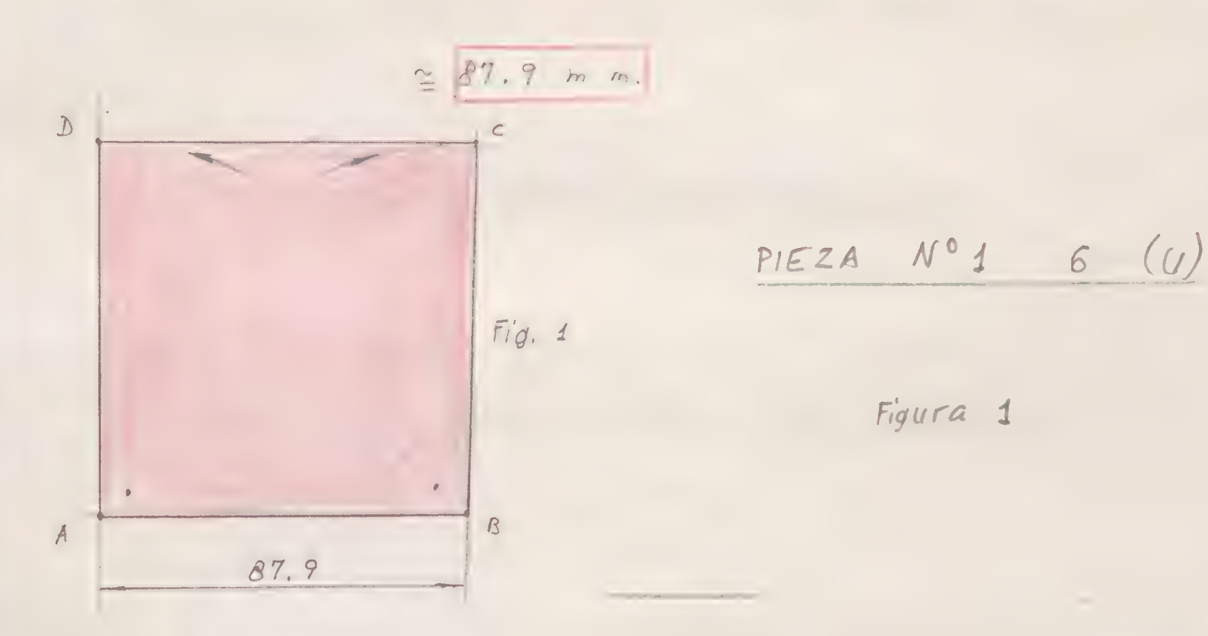


Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR = 6 unidades

Es un cuadrado cuyo lado l_4 se deduce del cuadrado ABCD de la figura 1 (cuadrado EFGH de la figura 2).

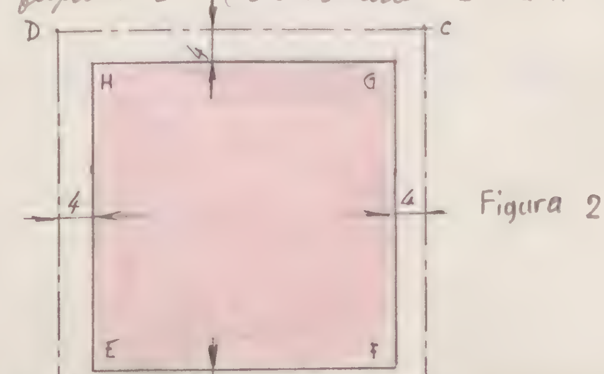


Figura 2

T. Alvarez Octubre - 1978



		Modelo M-21

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 24 unidades

Su longitud se deduce del cuadrado EFGH de la figura 2 y es ligeramente inferior a la de su lado $l_4 = 87{,}9 - 2 \times 4 \cong 78$ mm.; divide al cuadrado EFGH en cuatro cuadrados iguales. (fig. 3).

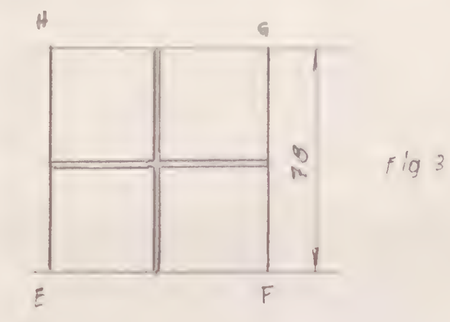


fig 3

PIEZA Nº 3 24 (U)

(simétricas 2 a 2)

Fig. 3

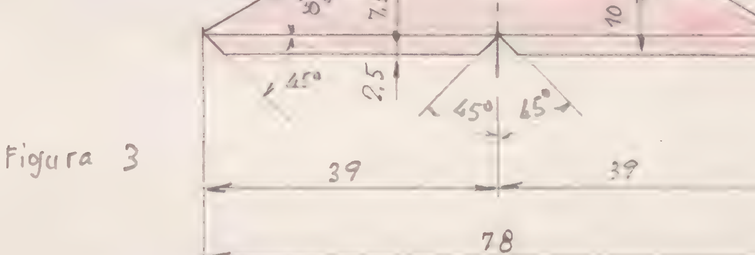
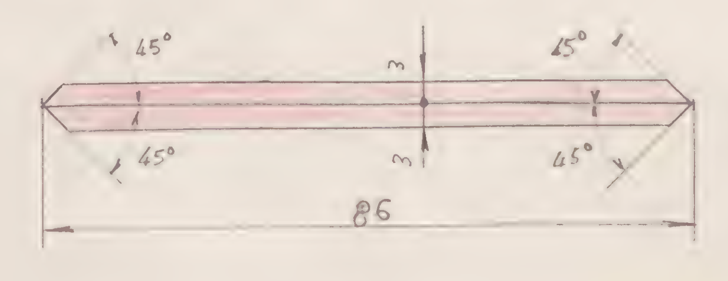


Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_6 (ver fig. 1; $a_6 = 87{,}9$ mm).- La tomamos igual a 86 mm.



PIEZA Nº 4

12 (U)

Fig. 4

Figura 4

UNE A 4-210 x 297

Calvani Octubre 1978



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 6 unidades

Es un cuadrado, cuyo lado l_4 se deduce del cuadrado ABCD de la fig. 1 (cuadrado EFGH de la figura 5).

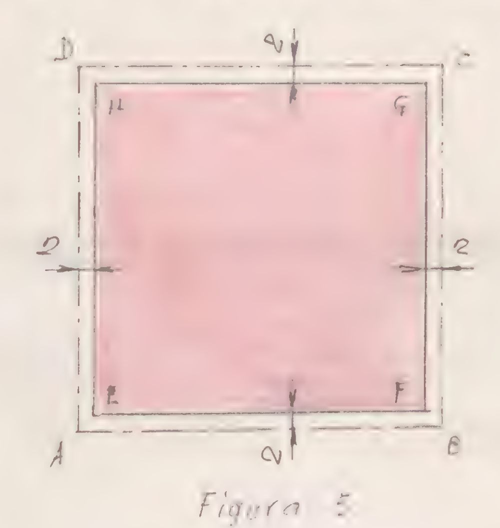


Figura 5

PIEZA N 5 6 (U)

Fig. 5

UNE A 4-210 x 297

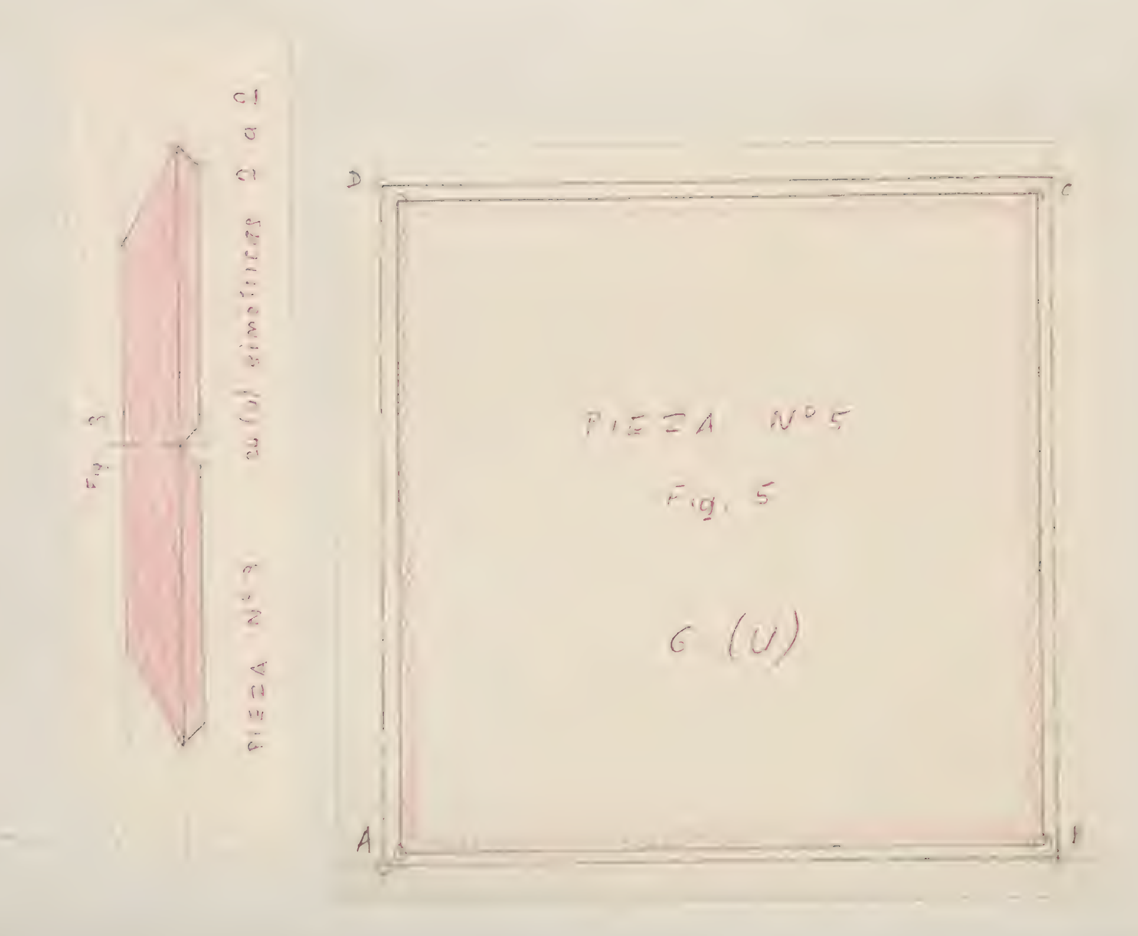






PIEZA Nº 4 12 (U)

Fig. 4



EXAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo representado en la lámina 2 del ejercicio E-F.

DATOS: Radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo pedido:

$$r_{ec}^{6} = 110 \ mm$$

Las características del exaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices	$V = 8$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_4$

El modelo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son cuadrados, cuyo lado l_4 es igual a la arista a_6 del

UNE A 4-210 x 297



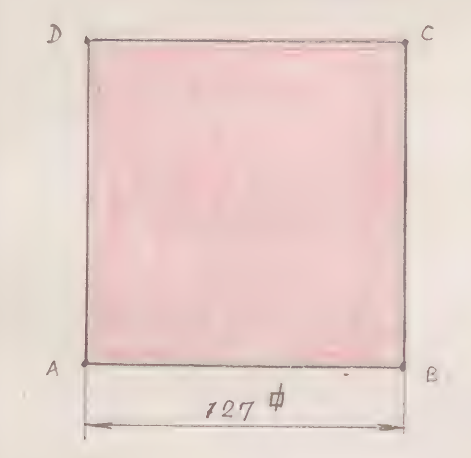
...xaedro regular pedido.

Su valor se obtiene despejando a_6 de la fórmula nº del ejercicio G. E. , o sea

$r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$ de donde $\boxed{a_6} = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = r_{ec}^6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= r_{ec}^6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1,1547005 3 9 \times 110 \simeq \boxed{127 \text{ m m}}$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1



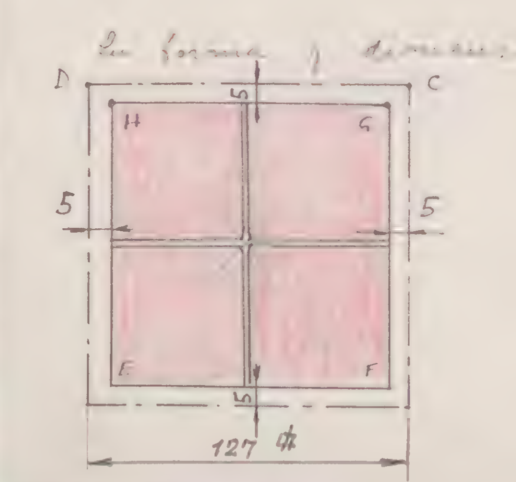
PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2. REFUERZO NORMAL INTERIOR 6 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2, y se deducen del cuadrado ABCD de la figura 1.



PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2

Figura 2.

Calvarez Enero 1979

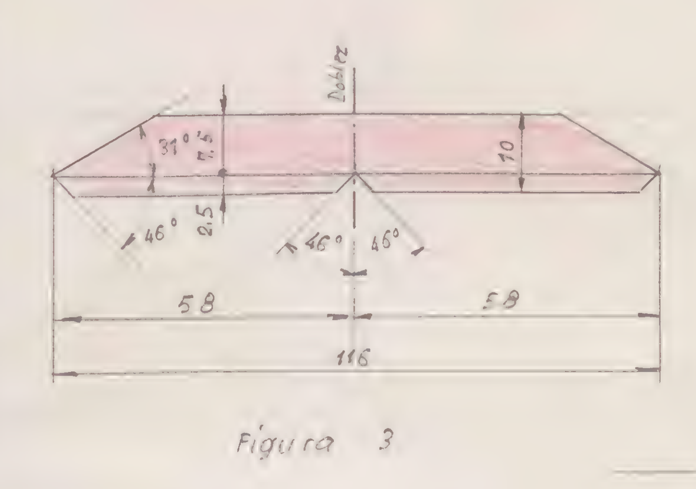


Modelo M-2.101

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR

24 unidades

Su longitud se deduce del cuadrado EFGH de la figura 2 y es ligeramente inferior a la de su lado $l_4 = 127 - 2 \times 5 \cong 116$ mm.; divide al cuadrado EFGH en cuatro partes iguales (fig. 2).



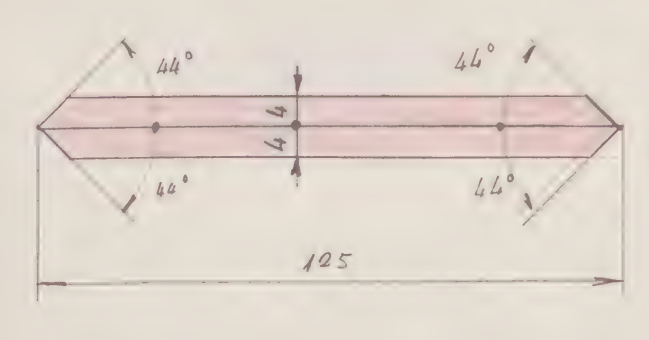
PIEZA Nº 3 24 (u)
(simétricas 2 a 2)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista $a_6 = 127$. La tomamos igual a 125 m.m (ver fig. 4



PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

UNE A 4-210 x 297

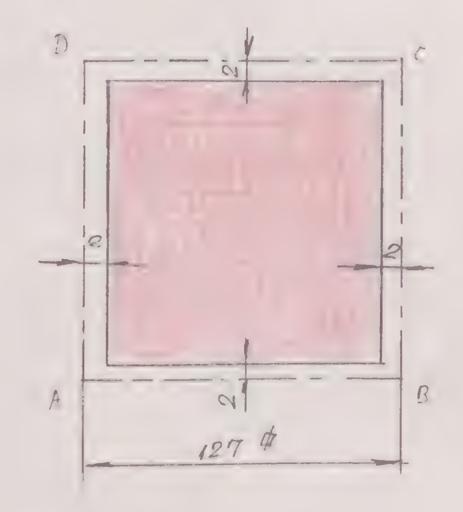
Enero 1979



[illegible]

PIEZA Nº 5   FORRO [illegible]   6 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1



PIEZA Nº 5   6 (u)

Figura 5

Figura 5

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1979

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.102

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, representado en la lámina 2 del ejercicio G.E.

DATO: Radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es el de caras vaciadas, variante del modelo M-2.101, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices	$V = 8$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_4$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son de forma cuadrada, cuyo lado l_4 es de igual longitud que la arista a_6 del exaedro pedido.



Su valor se obtiene despejando a_6 de la fórmula nº   del ejercicio G.E.   , o sea:

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_6 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_6} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1,15\,47\,00\,53\,9 \times 110 \cong \boxed{127 \text{ mm}}$$

La forma y dimensiones se representan en la figura 1

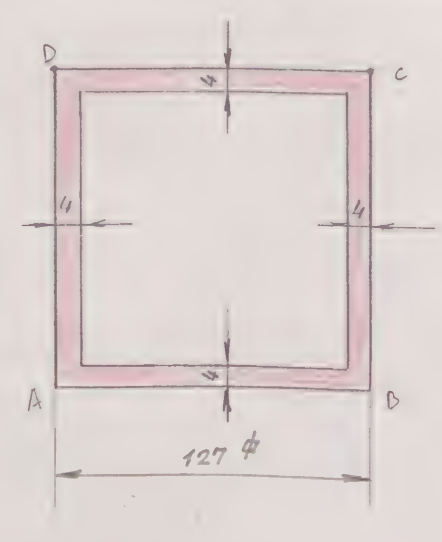


Figura 1

PIEZA Nº 1   6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2   UNIONES ARISTAS   12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_6 = 127 mm. La tomamos igual a 125 mm.

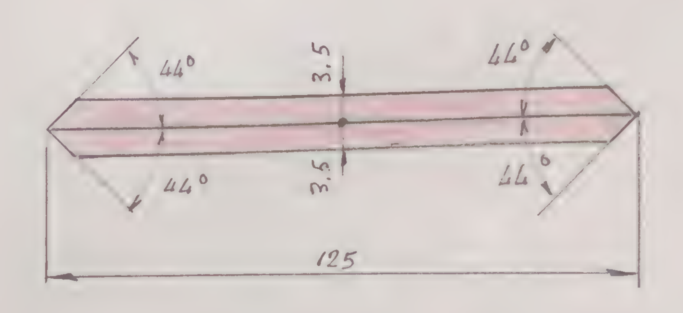


Figura 2

PIEZA Nº 2   12 (u)

Figura 2

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, representado en la lám. 2 del ejercicio G.E.

DATOS: Radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{6} = 76,1 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, vaciante del modelo M - 2.1, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices	$V = 8$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras de cada vértice	$3\ P_4$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son cuadrados, cuyo lado l_4 es igual a la arista a_6 del exaedro pedido.



Modelo M-210

Su valor se obtiene despejando a_6 de la fórmula nº del ejercicio 6. E. , o sea

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6 , \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_6} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 76.1 \times 1,15\,47\,00\,539 \cong 87.87\,27\,11\,02 \ldots \cong$$

$$\cong \boxed{87.9 \text{ mm}}$$

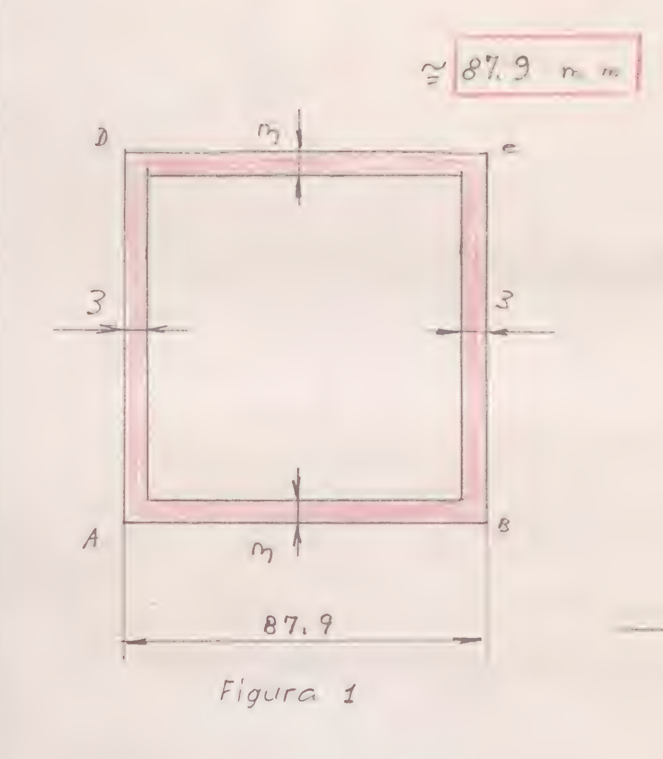


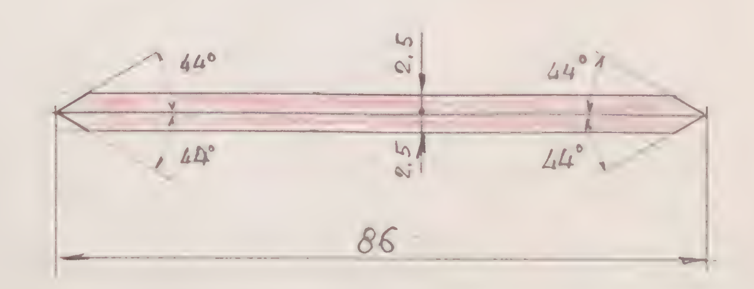
Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_6 (ver fig. 1; $a_6 = 87.9$.- La tomamos igual a 86 mm



PIEZA Nº 2

Fig. 2

12 (U)

UNE A 4-210 x 297

Octubre 1978





Fig. 1

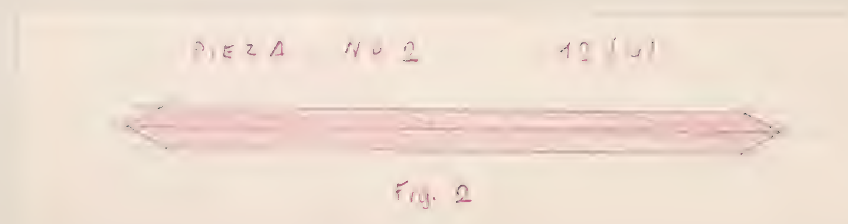


Fig. 2

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

RED ESFÉRICA DERIVADA DEL MISMO

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de una red esférica escaédrica, derivada del escaedro regular convexo por proyección de éste sobre una esfera concéntrica.

En la lámina 2 del ejercicio G.E. hemos representado el escaedro regular convexo, cuyos modelos corpóreos desarrollamos en M-2.1 (de caras macizas) y en el M-2.2 (de caras vaciadas.

Partiendo del escaedro regular convexo, obtendremos la red esférica derivada de este poliedro, que definimos de la siguiente manera:

Si imaginamos en el espacio, un escaedro regular convexo o cubo, de centro O y una esfera concéntrica con el mismo y de radio r' mayor que el r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al cubo ($r' > r_{ec}^{6}$), y proyectamos ahora desde O sobre la esfera de radio r', los vértices y aristas del mencionado escaedro, obtendremos sobre la esfera una figura geométrica que denominamos "red esférica exaédrica tipo a)" formada por arcos de círculos máximos, que determinan una serie de polígonos esféricos, todos iguales y distribuidos uniformemente sobre la superficie esférica.

Los vértices de dichos polígonos (proyecciones de los del exaedro) se les denominan nudos de la red, y los lados de los polígonos esféricos (proyecciones de las aristas del exaedro) serán todos iguales, y forman los lados de la red

UNE A 4·210 x 297

Alvarez Noviembre 1978



El presente modelo se compone del cubo generador y de los seis cuadriláteros mixtilíneos que forman las aristas de dicho cubo con los lados de la red. La totalidad del modelo es de caras macizas

DATO:

Radio r' de la esfera que contiene la red esférica exaédrica pedida:

r' = 110 m m.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARA CUADRADA DEL EXAEDRO GENERADOR, JUNTO CON LOS CUATRO CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS ADYACENTES 6 unidades

Para determinar sus dimensiones, consideremos un plano que pase por una arista del cubo generador y por su centro O., hasta cortar a la esfera de radio r', el cual nos producirá la sección representada en la figura 1, en la cual la distancia AB es la arista de un cubo inscrito en la esfera de radio r' = AO = BO = 110 mm.

Restémosle al radio r', la cantidad constante AC = BD = = 30 mm que fijaremos en 30 mm



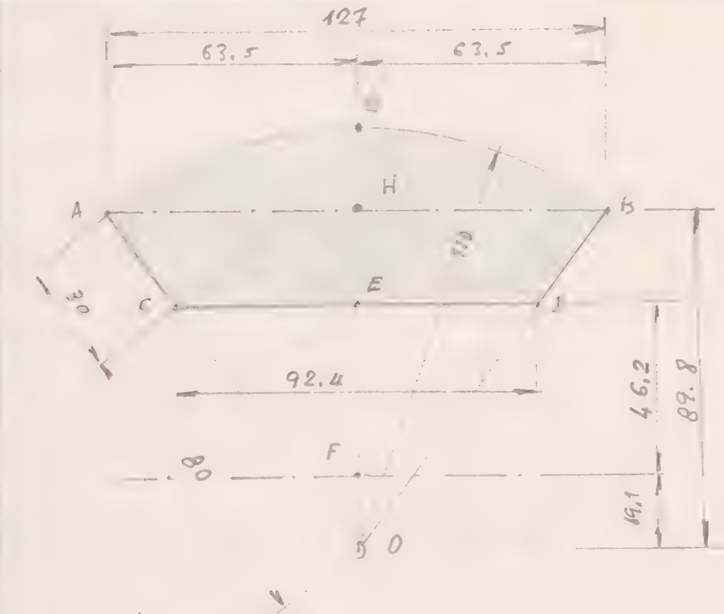


Figura 1

Unamos C con D: el segmento $\overline{CD}$ será la arista del [illegible].

Calculemos las [illegible] magnitudes:

1º $AB = a_6 =$ Arista del cubo inscrito en la esfera de radio r.

Su valor se deduce de la fórmula [illegible] del ejercicio

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_6 \qquad \text{de donde } \boxed{AB} = a_6 = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 110 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 127{,}0170593\ldots \cong$$

$$\cong \boxed{127 \text{ mm}}$$

2º $\boxed{AH} = HB = \frac{AB}{2} \cong \frac{127}{2} \cong \boxed{63{,}5 \text{ mm}}$

3º $\boxed{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{110^2 - \left[(127{,}0170593) : 2\right]^2} \cong$

$$\cong 89{,}81462388 \cong \boxed{89.8 \text{ mm}}$$

4º CD $\qquad \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO}$;; $\boxed{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CO}}{AO} = \frac{127{,}0170593 \times 80}{110} =$

$$\cong 92{,}37604312 \cong \boxed{92{,}4 \text{ mm}}$$

UNE A 4·210 x 297



5° $\boxed{EF} = CE = ED = \frac{CD}{2} \cong \frac{92,37\ 60\ 43\ 12}{2} \simeq \boxed{46,2\ mm}$

6° $\boxed{EO}$ $\quad \frac{\overline{HO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}$; $\boxed{\overline{EO}} = \frac{\overline{CO} \times \overline{HO}}{\overline{AO}} =$

$= \frac{80 \times 89,81\ 46\ 21\ 88}{110} = 65,31\ 97\ 26\ 46 \cong \boxed{65,3\ mm}$

7° $\boxed{FO} = \overline{EO} - \overline{EF} = 65,3 - 46,2 = \boxed{19,1\ mm}$

El diseño de la pieza nº 1, se efectuará: 1º construyendo un cuadrado de lado CD = 92,4 mm, y 2º acoplar a cada lado el cuadrilátero mixtilíneo ABDC de la fig. 1. El conjunto tendrá la forma de la figura 2

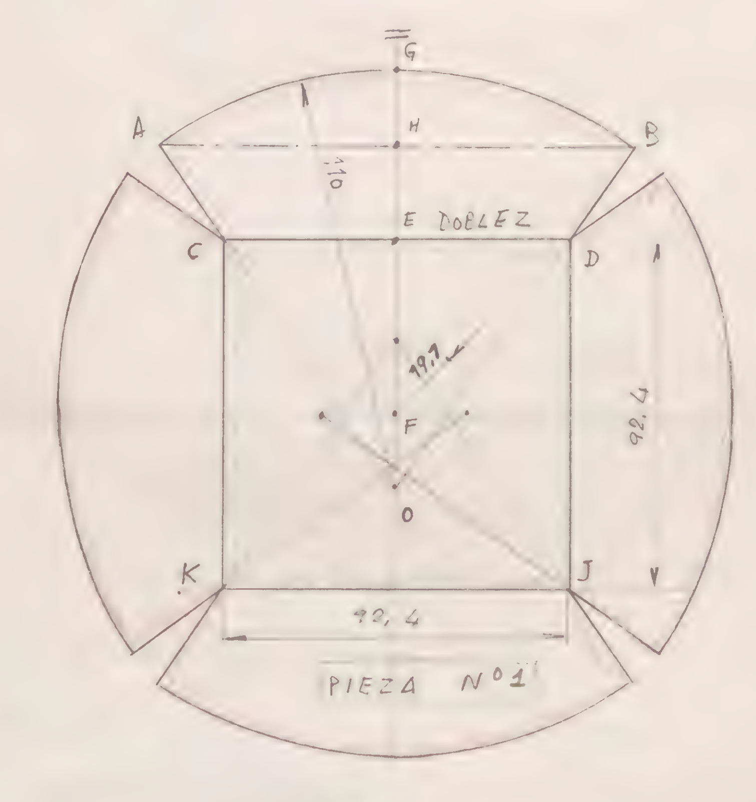


Figura 2

8° $\overline{GE}$

$\overline{GE} = \overline{GO} - \overline{EO} =$

$\overline{GO} - (\overline{EF} + \overline{FO}) =$

$= \overline{GO} - \overline{EF} - \overline{FO} =$

$= 110 - 46,2 - 19,1 = \boxed{44,7\ mm}$

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 2 — REFUERZO NORMAL INTERIOR DEL EXAEDRO GENERADOR — 6 unidades

Es un cuadrado cuyo lado l_4 se deduce del cuadrado LMNP de la figura 3 (cara del exaedro generador, cuadrado CDJK, de la figura 2)

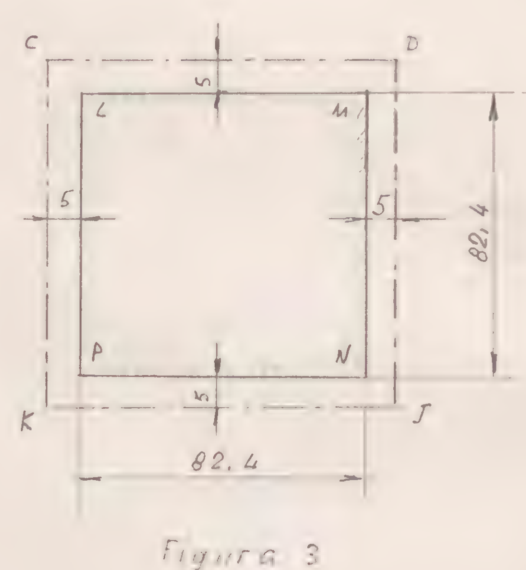


Figura 3

PIEZA Nº 2 6 (u)

Fig. 3

PIEZA Nº 3 — REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DEL EXAEDRO GENERADOR — 24 unidades

Su longitud se deduce del cuadrado LMNP de la figura 3 y es ligeramente inferior a la de su lado $l_4 = 82.4$; divide al cuadrado LMNP en cuatro cuadrados iguales (fig. 4)

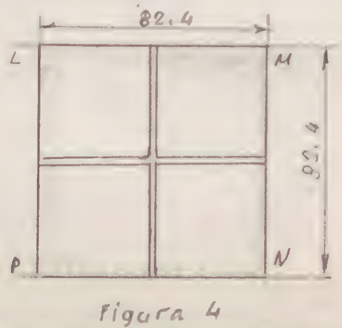


Figura 4

Croquis de la pieza nº 3 en la página siguiente



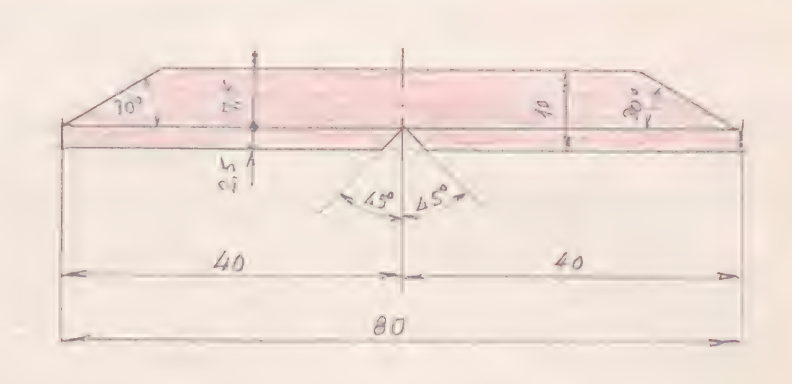


Figura 5

PIEZA Nº 3 — 24 (u) — fig. 5

PIEZA Nº 4 — REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

12 (unidades)

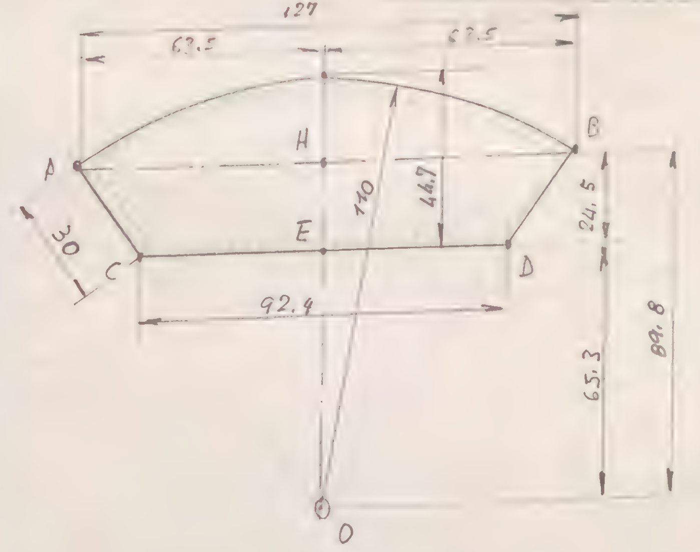


Figura 6

La forma y dimensiones (fig. 6) son las del cuadrilátero mixtilíneo ABDC de la figura 2

PIEZA Nº 4 — 12 (U)

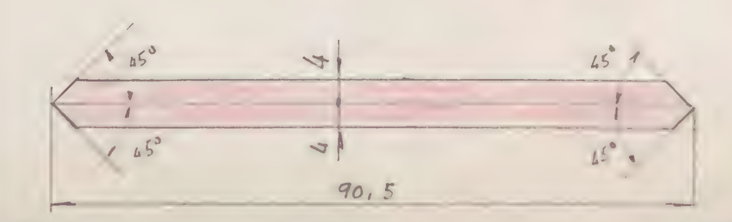
Fig. 6

PIEZA Nº 5 — UNIONES ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

12 (u)

Figura 7

La longitud es ligeramente inferior al lado CD (CD = 92.4 mm; ver fig. 6)



PIEZA Nº 5 — 12 (u)

Fig. 7

UNE A 4-210 x 297

Calvache — Noviembre 1978



PIEZA Nº 6 — FORRO COLOREADO CARAS EXAEDRO GENERADOR

6 unidades

Es un cuadrado cuyo lado l_o se deduce del cuadrado CDJK de la figura 2

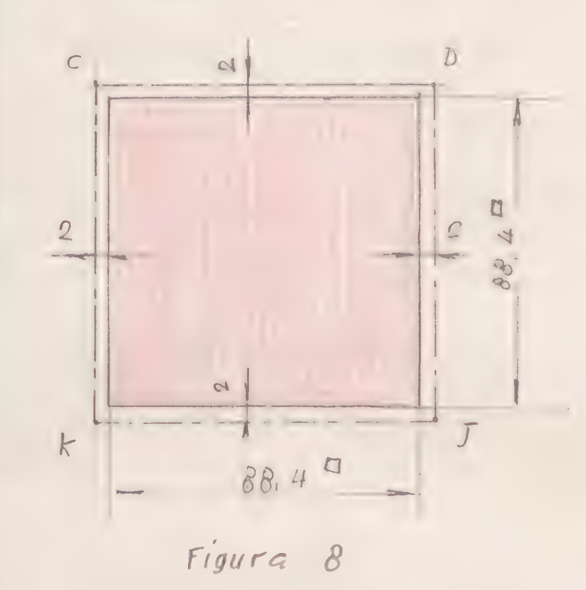


Figura 8

PIEZA Nº 6 — 6 (u)

Fig. 8

PIEZA Nº 7 — FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

24 unidades

Su tamaño se deduce del cuadrilátero mixtilíneo ABDC, de la figura 2, según el croquis de la figura 9

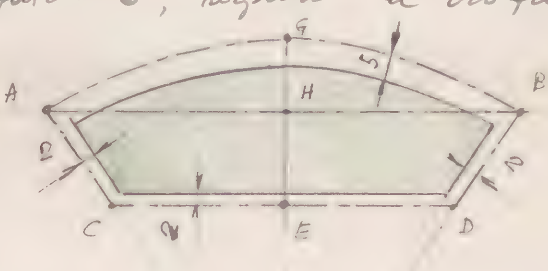


Figura 9

PIEZA Nº 7 — 24 (u)

Fig. 9



En esta red esférica, la superficie de la esfera, queda dividida en seis partes de igual forma y superficie.

Cada una de ellas tiene la forma de cuadriláteros esférico equiláteros y equiángulos (proyecciones de las caras del exaedro generador); en cada nudo concurren tres lados de la red, siendo 12 el número total de éstos.

Estos 12 vértices son a su vez los vértices de otro exaedro regular convexo, mayor que el generador, que está inscrito en la esfera de radio $r' = 110$ mm.



ESFÉRICA EXOÉDRICA

$r_e = 110$

PIEZA Nº 1

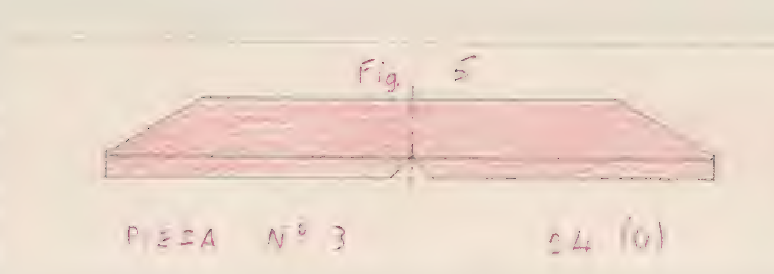
Fig. 2 6 (u)

PIEZA Nº 2

Fig. 3 6 (u)

PIEZA Nº 6

Fig. 8 6 (u)



PIEZA Nº 4

Fig. 6 12 (u)

PIEZA Nº 5 12 (u)

Fig 7

PIEZA Nº 7

Fig. 9 24 (u)

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.4

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

RED ESFÉRICA DERIVADA DEL MISMO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

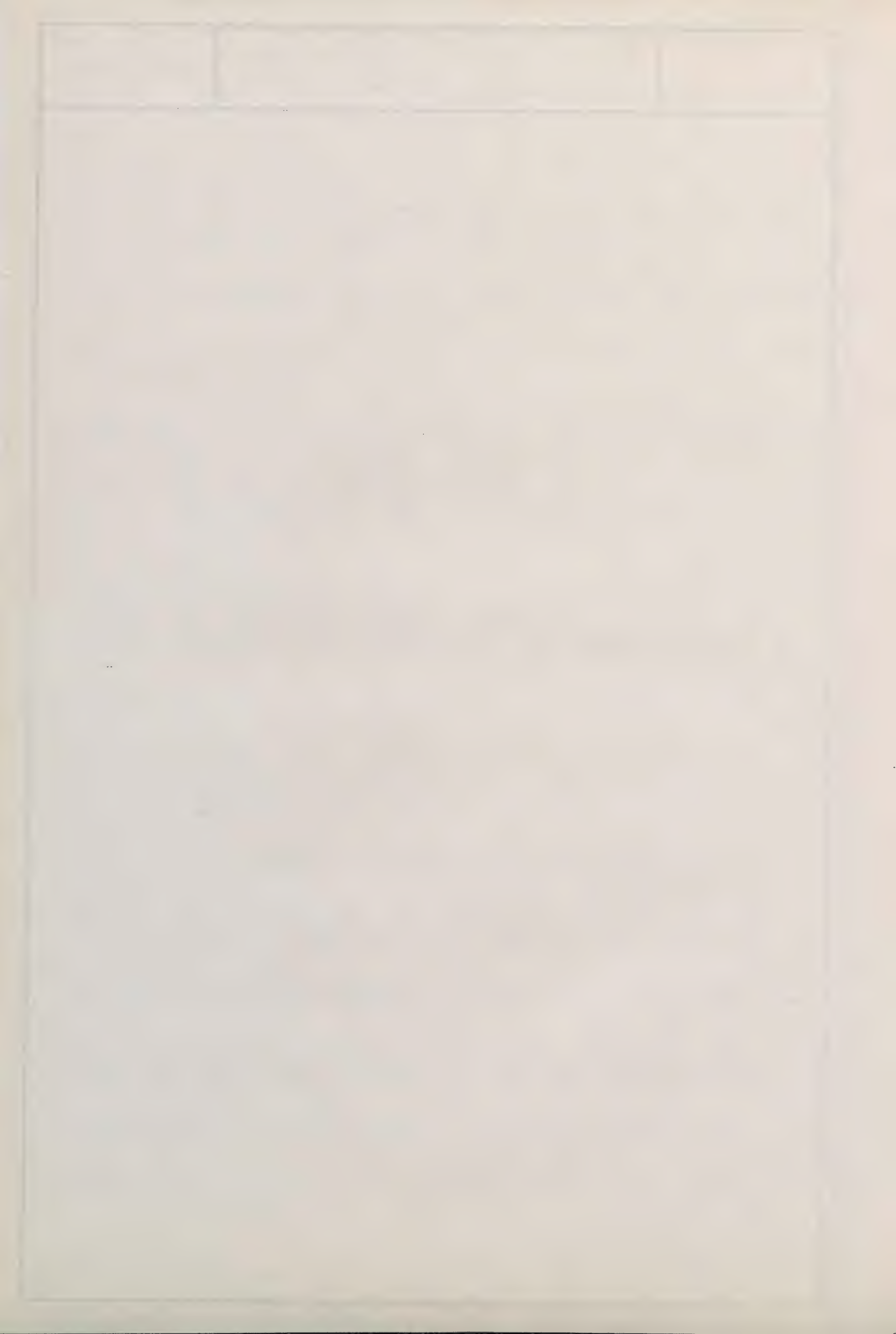
Este modelo M - 2.4, es una variante del modelo M - 2.3, que se obtiene al añadirle los planos proyectantes de las diagonales de las caras del exaedro regular convexo generador. Así pues daremos el siguiente y nuevo

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de una red esférica exaédrica, derivada del exaedro regular convexo, como ampliación del modelo M - 2.3

Partiendo del exaedro regular convexo, obtendremos la nueva red esférica derivada de este poliedro, que definimos de la siguiente manera:

Si imaginamos, en el espacio, un exaedro regular convexo o cubo, de centro O, y una esfera concéntrica con el mismo, de radio r' mayor que el radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al cubo ($r' > r_{ec}^{6}$), y proyectamos desde O sobre la esfera de radio r', los vértices, aristas y diagonales de las caras del mencionado exaedro (exaedro generador), obtendremos sobre la esfera una figura geométrica que denominaremos "red esférica exaédrica tipo b)", formada por arcos de círculos máximos, y que a su vez determinan una serie de triángulos esféricos, todos iguales y distribuidos uniformemente sobre la superficie esférica.

Los vértices de dichos triángulos (proyecciones de los vértices del



exaedro generador y de los centros de sus caras), forman los "nudos de la red"; los lados de dichos triángulos esféricos (proyecciones de las aristas del exaedro y de las semi-diagonales de sus caras) forman los "lados de la red".

El presente modelo se compone del cubo generador y de los veinticuatro triángulos esféricos, que forman las aristas y semi-diagonales de las caras del cubo con los lados de la red. El modelo es de caras macizas.

Los nudos de la red son de dos clases: a) Los que se obtienen al proyectar los vértices del cubo, en el que concurren seis lados de la red (tres de ellos proyecciones de las aristas y los otros tres proyecciones de las semi-diagonales de las caras); y b) Los que se obtienen al proyectar los centros de las caras del exaedro generador en los que concurren cuatro lados de la red (proyecciones de las semi-diagonales de las caras)

Los nudos de la clase a) son vértices de un cubo inscrito en la esfera de radio r', y los de la clase b) son vértices de un octaedro regular convexo también inscrito en dicha esfera.

DATO: Radio r' de la esfera que contiene la red esférica pedida:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

UNE A 4·210 x 297

Talavera   Noviembre 1978



Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARA CUADRADA DEL EXAEDRO GENERADOR, JUNTO CON LOS CUATRO CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS ADYACENTES 6 unidades

Esta pieza es exactamente igual a la representada en la figura 2 del modelo M- 2. 3.

PIEZA Nº 1 6 (u) Fig. 2 ; Mod. - 2. 3

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DEL EXAEDRO GENERADOR 6 unidades

Esta pieza es exactamente igual a la representada en la figura 3 del modelo M - 2. 3

PIEZA Nº 2 6 (u) Fig. 3; Mod. - 2.3

PIEZA Nº 3 CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS DIAGONALES DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 24 unidades

Las dimensiones se detallan en la figura 1 de este



Modelo M - 9??

Figura 1

ejercicio.

Para determinar sus dimensiones, consideremos un plano que pase por la diagonal de cara del cubo generador y por su centro O, hasta cortar a la esfera de radio r', el cual nos producirá la sección representada en la figura 1, en la cual la distancia AB es la diagonal de la cara de un cubo inscrito en la esfera de radio AO = BO = 110 m m.

Restémosle al radio r' la cantidad constante AC = BD = 30 m m que fijamos en 30 m m, y unamos C con D; el segmento CD será la diagonal de la cara del cubo generador.

Calcularemos las siguientes magnitudes:

1° AB AB = Es la diagonal de la cara del cubo inscrito en la esfera de radio r'.

La arista a_6 de dicho cubo se deduce de la fórmula del ejercicio . Por lo que será: $AB = a_6 \sqrt{2}$

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6 \quad \text{de donde} \quad a_6 = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y también:}$$

$$AB = a_6 \sqrt{2} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} = r_{ec}^{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \simeq$$

$$= 110 \times 1.63\,29\,93\,16\,2 \simeq 179,62\,92\,478 \simeq \boxed{179.6 \text{ m m}}$$

UNE A 4-210 x 297

Noviembre 1978



Modelo M- 2.11

2° AH

$$\overline{AH} = \overline{HB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{179,62\ 92\ 47\ 8}{2} = 89,81\ 46\ 23\ 9 \cong 89.8$$

3° OH

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \cong \sqrt{110^2 - 89,81\ 46\ 23\ 9^2} =$$

$$\cong 63,50\ 85\ 29\ 62 \cong 63,5 \text{ mm}$$

4° CD

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} \quad ,, \quad \overline{CD} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CO}}{\overline{AO}} \cong \frac{179,62\ 92\ 47\ 8 \times 80}{110} \cong$$

$$\cong 130,63\ 94\ 53\ 0 \cong 130,6 \text{ mm}$$

5° EO

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} \quad ,, \quad \overline{EO} = \frac{\overline{CO} \times \overline{HO}}{\overline{AO}} = \frac{80 \times 63,50\ 85\ 29\ 62}{110} \cong$$

$$\cong 46,18\ 80\ 21\ 54 \cong 46,2 \text{ mm}$$

6° GH

$$\overline{GH} = \overline{GO} - \overline{EO} = 110 - 46.2 = 63.8 \text{ mm}$$

7° HE

$$\overline{HE} = \overline{OH} - \overline{EO} = 63.5 - 46.2 = 17,3 \text{ mm}$$

PIEZA N° 3 24 (u) Fig. 1

PIEZA N° 4 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR 12 unidades

UNE A 4-210 x 297

[signature] Noviembre 1978



Esta pieza es igual a la representada en la figura 6 del modelo M-2.3

PIEZA Nº 4 12 (u) Fig. 6; modelo M-2.3

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

12 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 7 del modelo M-2.3

PIEZA Nº 5 12 (u) Fig. 7; modelo M-2.3

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 24 unidades

Su forma y dimensiones están representadas en la figura 2.

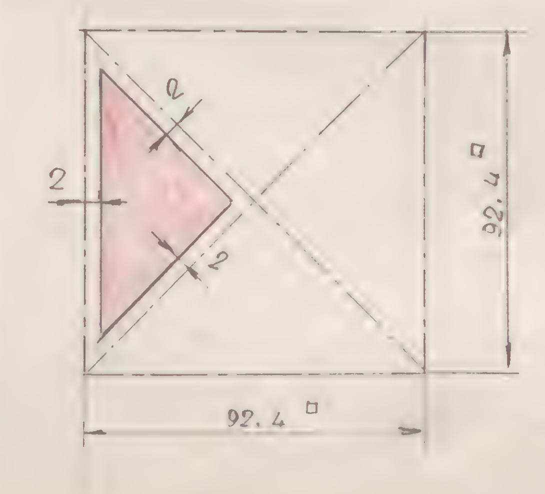


Figura 2

PIEZA Nº 6 24 (u)

Fig. 2

Tabanera Noviembre 1978



PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

24 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 9 del modelo M - 2.3.

PIEZA Nº 7 24 (u) Figura 9; Modelo M - 2.3

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-DIAGONALES DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 12 unidades

Su forma y dimensiones son las del cuadrilátero mixtilíneo AGEC de la figura 1 de este ejercicio

PIEZA Nº 8 12 (u) Ver fig. 1 de este ejercicio.

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-DIAGONALES DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3, deducida del cuadrilátero mixtilíneo AGEC de la fig. 1 de este ejercicio.

UNE A 4-210 x 297

[illegible] Noviembre 197[illegible]



PIEZA Nº 9 48 (4)

Fig. 3

Figura 3

En esta red esférica la superficie de la esfera queda dividida en veinticuatro partes de igual forma y superficie.

Cada una de estas partes está limitada por un triángulo esférico cuyos lados son arcos de círculo máximo en la esfera de radio r' = 110 mm que envuelve al cubo generador.

Los nudos de la red, son de dos clases: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera, y Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, también inscrito en la misma esfera.



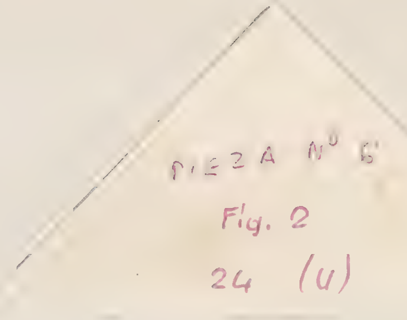
PATRONES

Mod.: M-2.4

PIEZA Nº 3

Fig. 1

6 (u)



PIEZA Nº 8

12 (u)

PIEZA Nº 9

Fig. 3

48 (u)

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.5

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

RED ESFÉRICA DERIVADA DEL MISMO

Radio de la esfera circunscrita :

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

Este modelo M - 2.5 (al igual que el modelo M - 2.4) es una nueva variante del modelo M - 2.3, que se obtiene al añadirle a éste los planos proyectantes de las paralelas a las aristas de las caras del exaedro regular generador, que pasen por el centro de dichas caras. Así pues daremos el siguiente enunciado (igual al del modelo M - 2.4.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de una red esférica exaédrica, derivada del exaedro regular convexo, como ampliación del modelo M - 2.3.

Partiendo del exaedro regular convexo, obtendremos la nueva red esférica derivada de este poliedro, que definiremos de la siguiente manera:

Si imaginamos, en el espacio, un exaedro regular convexo o cubo, de centro O, y una esfera concéntrica con el mismo, de radio r' mayor que el radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al cubo ($r' > r_{ec}^{6}$), y proyectamos desde O, sobre la esfera de radio r', los vértices, aristas y paralelas medias de las caras del mencionado exaedro (exaedro generador), obtendremos sobre la esfera una figura geométrica que denominaremos "red esférica exaédrica de tipo c)", formada por arcos de círculos máximos, y que a su vez determinan una serie de cuadriláteros esféricos, todos



iguales y distribuidos uniformemente sobre la superficie esférica.

Los vértices de dichos cuadriláteros esféricos (proyecciones de los vértices, centro de las aristas y centros de las caras del exaedro generador), forman los "nudos de la red", y los lados de los cuadriláteros esféricos (proyecciones de las semi-aristas y semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador), forman los "lados de la red"

El presente modelo se compone del cubo generador y de los veinticuatro cuadriláteros esféricos que forman las semi-aristas y semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador. El modelo es de caras macizas

Los nudos de la red son de tres clases: a) los que se obtienen al proyectar los vértices del cubo generador en el que concurren tres lados de la red (proyecciones de las semi-aristas); b) Los que se obtienen al proyectar los centros de las caras del exaedro generador, en los que concurren cuatro lados de la red (proyecciones de las semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador) y c) Los que se obtienen al proyectar los puntos medios de las aristas del exaedro generador, en los que concurren cuatro lados de la red (proyecciones de las semi-aristas y semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador).

Los nudos de la clase a) son vértices de un cubo inscrito en la esfera de radio r'; los de la clase b) son vértices de

UNE A 4-210 x 297

[signature] Noviembre 1978



un octaedro truncado convexo, inscrito en la misma esfera; y los de la clase c) son vértices de un Arquimediano III (ver lámina 35 del ejercicio G.E.), también inscrito en la misma esfera.

DATO: Radio r' de la esfera que contiene la red esférica pedida:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

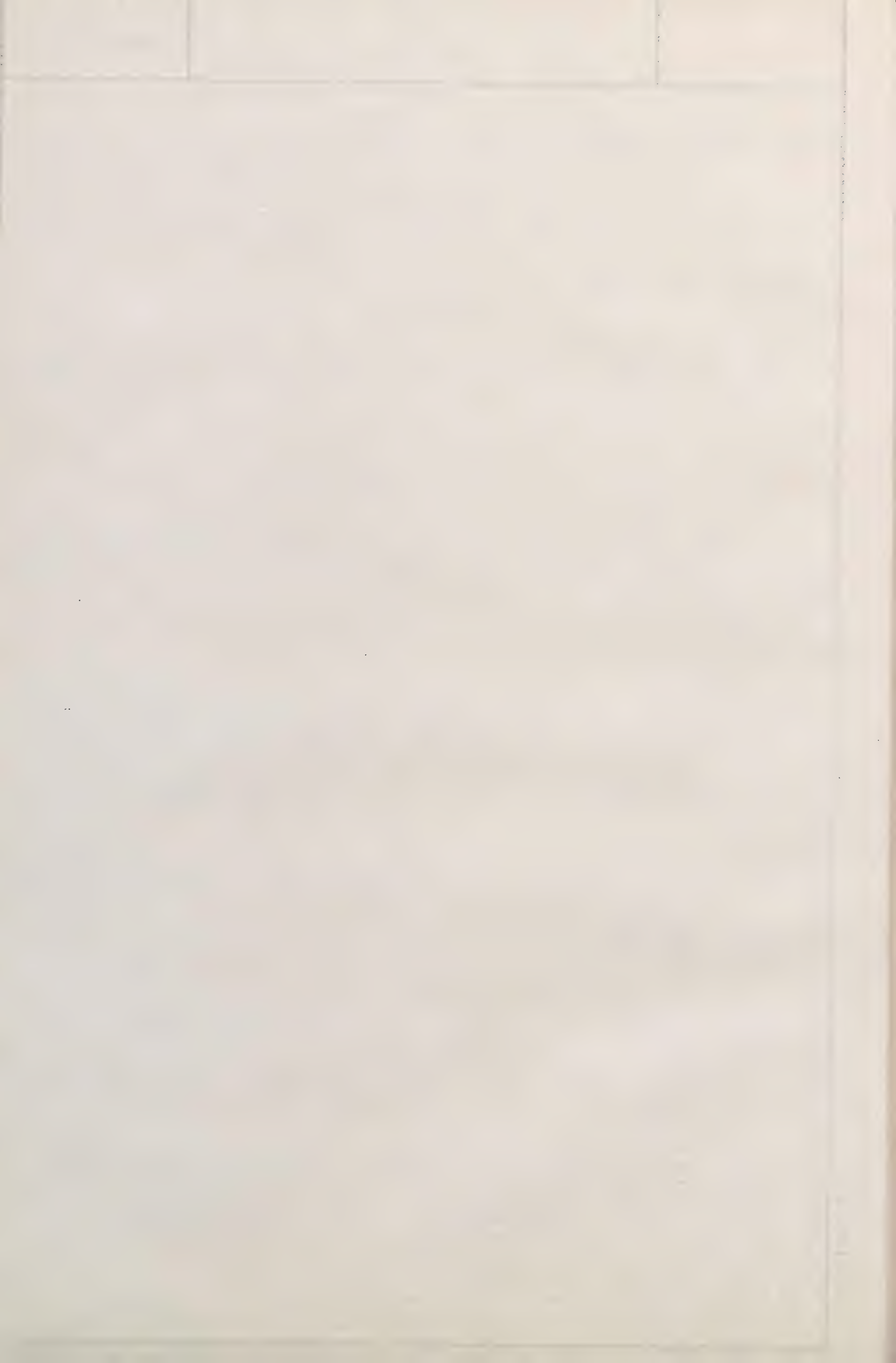
PIEZA Nº 1 CARA CUADRADA DEL EXAEDRO GENERADOR, JUNTO CON LOS CUATRO CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS ADYACENTES 6 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 2 del modelo M-2.3.

PIEZA Nº 1 6 (u) Fig. 2; Modelo - 2.3

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DEL EXAEDRO GENERADOR 6 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 3 del



Modelo M-2.3

PIEZA Nº 2   6 (u)   Fig. 2) Modelo M-2.3

PIEZA Nº 3   CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS DE LAS PARALELAS MEDIAS EN LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR.   24 unidades

La forma y dimensiones se deducen en la figura nº 1 de este ejercicio.

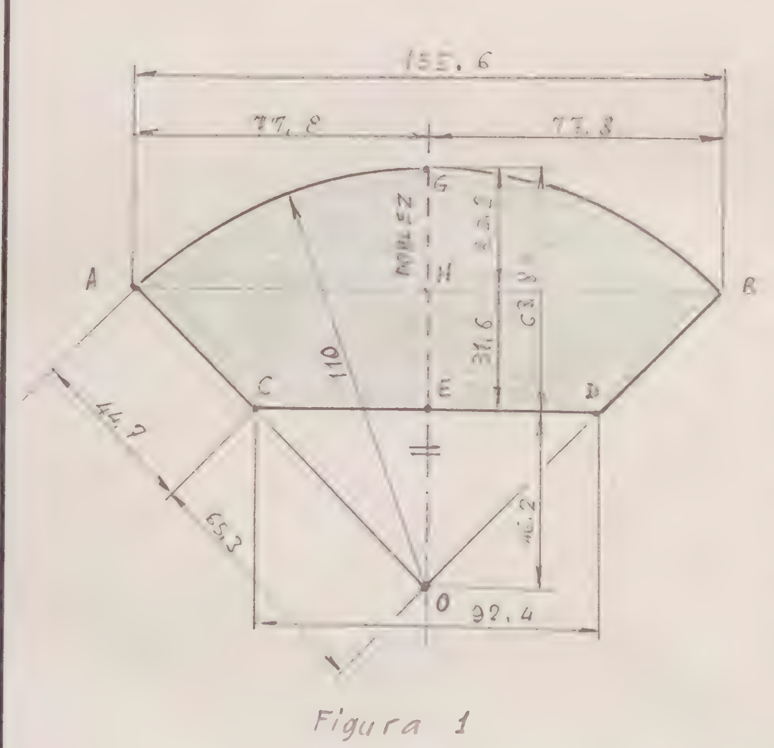


Figura 1

Para determinar sus dimensiones, consideraremos un plano que pase por la paralela media del cuadrado de una cara del exaedro generador y por el centro del mismo, hasta cortar a la esfera de radio $r' = 110$ mm., el cual nos producirá la sección representada en la figura 1.

En ésta, la distancia $\overline{AB}$ es el lado de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio $AO = BO = 110$ mm.

La distancia $\overline{CD}$ es de igual longitud que la arista a_6 del exaedro generador, deducida en la fig. 1 del Modelo M-2.3

$$\overline{CD} \cong 92.37604312.. \cong 92.4 \text{ m..}$$

Álvarez   Noviembre 1978



		Modelo M-2.5

Calculamos a continuación las siguientes magnitudes:

1° AB $\quad \overline{AB} = r^{6}_{90} \times \sqrt{2} = 110 \times \sqrt{2} \cong 155,56\ 34\ 91\ 8... \cong$ **155,6 mm**

2° EO $\quad \overline{EO} = \frac{CD}{2} \cong 46,18\ 80\ 21\ 56 \cong$ **46,2 mm**

3° CO $\quad \overline{CO} = \frac{CD \times \sqrt{2}}{2} \cong \frac{92,37\ 60\ 43\ 12... \times \sqrt{2}}{2} \cong 65,31\ 97\ 26\ 49 \cong$ **65,3 mm**

4° AC $\quad \overline{AC} = AO - CO = 110 - 65.31\ 97\ 26\ 49 \cong 44,68\ 02\ 73\ 51 \cong$

$\cong$ **44,7 mm**

5° OH $\quad \overline{OH} = AH = \frac{AB}{2} = \frac{155.56\ 34\ 91\ 8}{2} \cong 77,78\ 17\ 45\ 90 \cong$

$=$ **77,8 mm**

6° EH $\quad \overline{EH} = OH - EO \cong 77,78\ 17\ 45\ 90 - 46,18\ 80\ 21\ 56 \cong$

$= 31,59\ 37\ 24\ 34 \cong$ **31,6 mm**

7° GH $\quad \overline{GH} = OG - OH = 110 - 77,78\ 17\ 45\ 90 \cong$

$= 32,21\ 82\ 54\ 10 \cong$ **32,2 mm**

PIEZA Nº 3 $\quad$ 24 (U) $\quad$ Fig. 1

PIEZA Nº 4 $\quad$ REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS PARALELAS MEDIAS EN LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR $\quad$ 12 unidades

[illegible] Noviembre 1978



Modelo M - 2.5

La forma y dimensiones (fig. 2) son las del cuadrilátero mixtilíneo AGBDC de la figura 1 de este ejercicio

PIEZA Nº 4 12 (u)

Fig. 2

Figura 2

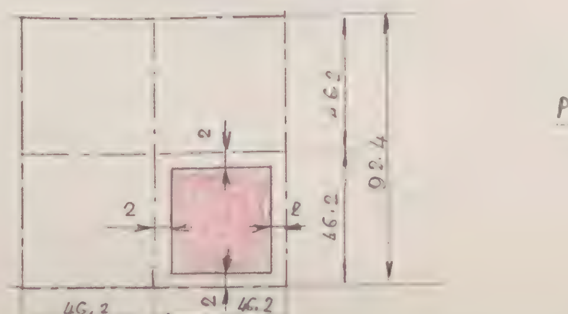
PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

12 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 7 del modelo M - 2.3

PIEZA Nº 5 12 (u) Fig. 7; modelo M - 2.3

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 24 unidades



PIEZA Nº 6 24 (u)

Fig. 3

Figura 3

Noviembre 1978



PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4, deducida del cuadrilátero mixtilíneo AGEC de la figura 1 del ejercicio modelo M - 2,3

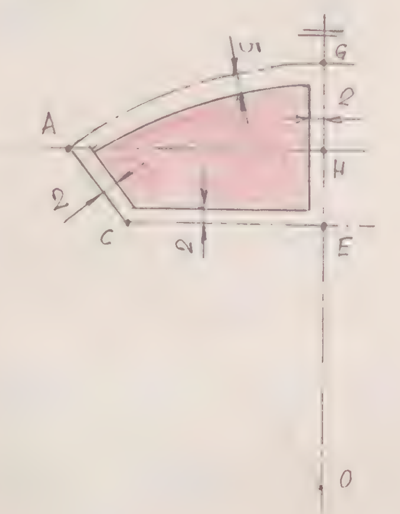


Figura 4

PIEZA Nº7 48 (u)
(simétricas 2 a 2)

Fig. 4

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-PARALELAS MEDIAS DE UNA CARA DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades
(simétricas 2 a 2)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5, deducida del cuadrilátero mixtilíneo AGEC de la figura 2 de este ejercicio.

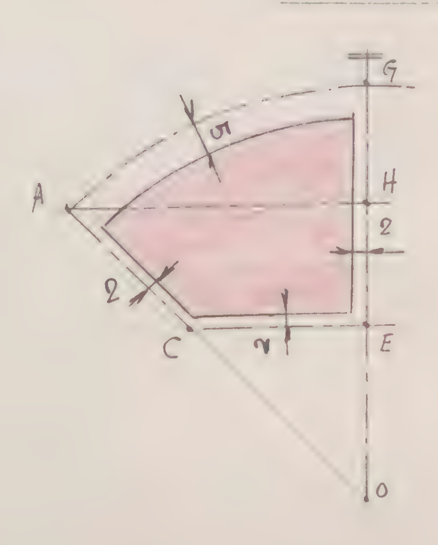


Figura 5

PIEZA Nº 8 48 (u)

Fig. 5



Noviembre 1978



PIEZA Nº 9 CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS DE LAS SEMI-PARALELAS MEDIAS EN LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR . 12 unidades

Su forma y dimensiones son las del cuadrilátero AGHEC de la figura 1 de este ejercicio

---

En esta red esférica la superficie de la esfera queda dividida en veinticuatro partes de igual forma y superficie.

Cada una de estas partes está limitada por un cuadrilátero esférico cuyos lados son arcos de círculos máximos en la esfera de radio r' = 110 mm. que envuelve al cubo generador.

Los nudos de la red son de tres clases: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

UNE A 4-210 x 297



PATRONES

Modelo M-2,5

PIEZA Nº 8

48 (u)

Fig. 5

PIEZA Nº 9

12 (u)

Fig. 6

PIEZA Nº 4

12 (u)

Fig. 2

PIEZA Nº 6

24 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 7

24 (u)

Figura 4

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 2.6

EXAEDRO REGULAR CONVEXO

RED ESFÉRICA DERIVADA DEL

MISMO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

Este modelo M - 2.6 es una nueva variante del modelo M - 2.3, y se obtiene al añadirle a éste los planos proyectantes de las diagonales de las caras del exaedro regular convexo generador (ver modelo M - 2.4), y los planos proyectantes de las paralelas medias a las aristas de las caras de dicho exaedro (ver modelo M - 2.5), por lo que también puede considerarse como modelo resultante de la unión al modelo M - 2.4 del M - 2.5.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de una red esférica exaédrica, obtenida como suma de las de los modelos M - 2.4 y M - 2.5

Partiendo del exaedro regular convexo, obtendremos la nueva red esférica derivada de este poliedro, que definiremos de la siguiente manera:

Si imaginamos, en el espacio, un exaedro regular convexo o cubo, de centro O, y una esfera concéntrica con el mismo, de radio r' mayor que el radio r^6_{ec} de la esfera circunscrita al cubo ($r' > r^6_{ec}$), y proyectamos desde O, sobre la esfera de radio r', los vértices, aristas, diagonales y paralelas medias de las caras del mencionado exaedro (exaedro generador), obtendremos una figura geométrica que denominaremos "red esférica exaédrica de tipo C)", formada por arcos de círculos máximos, y que a su vez determinan una serie de triángulos

UNE A 4-210 x 297



esféricos, todos iguales y distribuidos uniformemente sobre la superficie esférica.

Los vértices de dichos triángulos esféricos (proyecciones de los vértices, centro de las aristas y centros de las caras del exaedro generador), forman los "nudos de la red" y los lados de los triángulos esféricos (proyecciones de las semi-aristas, semi-diagonales y semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador), forman los "nudos de la red"

El presente modelo se compone del cubo generador y de los cuarenta y ocho triángulos esféricos formados por las proyecciones de los elementos del cubo generador, detallados anteriormente. El modelo es de caras macizas

Los nudos de esta red esférica son de tres clases: a) Los que se obtienen al proyectar los vértices del cubo generador, en el que concurren seis lados de la red (tres, proyecciones de las semi-aristas, y tres proyecciones de las semi-diagonales); b) Los que se obtienen al proyectar los centros de las caras del exaedro generador, en los que concurren ocho lados de la red (cuatro, proyecciones de las semi-diagonales, y cuatro, proyecciones de las semi-paralelas medias); y c) Los que se obtienen al proyectar los puntos medios de las aristas del exaedro generador, en los que concurren cuatro lados de la red (dos, proyecciones de las semi-aristas, y dos, proyecciones de las semi-paralelas medias de las caras del exaedro generador.

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Noviembre 1978



Los nudos de la clase a) son vértices de un cubo inscrito en la esfera de radio r', y tomados de dos en dos, son a su vez vértices de dos tetraedros regulares convexos y conjugados, inscritos también en dicha esfera; los de la clase b) son vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la misma esfera, y los de la clase c) son vértices de un Arquimediano III (ver lámina 35 del ejercicio G.E.), también inscrito en la misma esfera.

DATO: Radio r' de la esfera que contiene la red esférica pedida:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 — CARA CUADRADA DEL EXAEDRO GENERADOR, JUNTO CON LOS CUATRO CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS ADYACENTES — 6 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 2 del modelo M-2.3

PIEZA Nº1 — 6 (u) — Fig. 2; Modelo 2.3



PIEZA Nº 2 — REFUERZO NORMAL INTERIOR DEL EXAEDRO GENERADOR — 6 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 3 del modelo M-2.3.

PIEZA Nº 2 — 6 (u) — Fig. 3; Modelo M-2.3

PIEZA Nº 3 — CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS DE LAS PARALELAS MEDIAS DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR — 24 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 1 del modelo M-2.5

PIEZA Nº 3 — 24 (u) — Fig. 1; Modelo M-2.5

PIEZA Nº 4 — REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS PARALELAS MEDIAS EN LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR — 12 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 2 del modelo M-2.5

PIEZA Nº 4 — 12 (u) — Fig. 2; Modelo M-2.5

UNE A 4-210 x 297

Noviembre 1978



PIEZA Nº5 UNIONES ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

12 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 7 del modelo M-2.3

PIEZA Nº5 12 (u) Fig. 7; modelo M-2.3

PIEZA Nº6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades

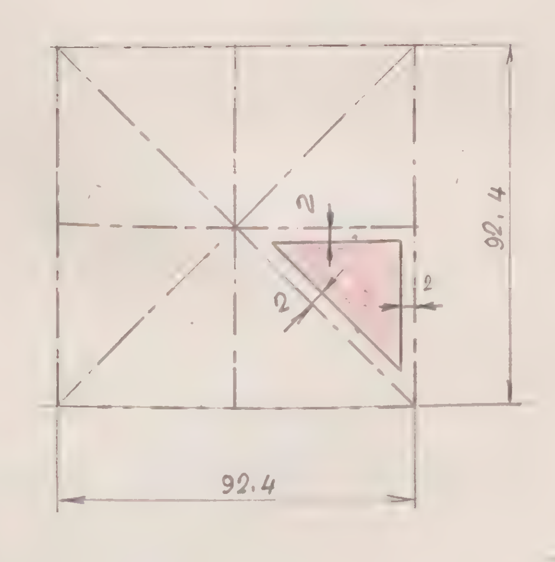


Figura 1

PIEZA Nº6 48 (u)

Fig. 1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR

48 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la fig. 4 del modelo M-2.5

PIEZA Nº 7 48 (u) (simétricas 2 a 2) Fig 4; mod. M-2.5

UNE A 4-210 x 297

Noviembre 1978



PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-PARALELAS MEDIAS DE UNA CARA DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la figura 5 del modelo M - 2.5

PIEZA Nº 8 48 (u) Fig. 5; Modelo M-2.5

PIEZA Nº 9 CUADRILÁTEROS MIXTILÍNEOS DE LAS SEMI-PARALELAS MEDIAS EN LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR, Y REFUERZO NORMAL INTERMEDIO 72 unidades

Esta pieza es igual a la PIEZA Nº 9 del modelo M- 2.5

PIEZA Nº 9 72 (u) Pieza nº 9 de M- 2.5

PIEZA Nº 10 (ver al final, e incluir aquí)

En esta red esférica, la superficie de la esfera queda dividida en cuarenta y ocho partes de igual forma y superficie.
Cada una de estas partes está limitada por un triángulo esférico cuyos lados son arcos de círculos máximos en la esfera de radio r' = 110 mm que envuelve al cubo generador.
Los nudos de la red son de tres clases: Ocho de clase a), vér-



		Modelo M - 2.6

tices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS PROYECTANTES DE LAS SEMI-DIAGONALES DE LAS CARAS DEL EXAEDRO GENERADOR 48 unidades

Esta pieza es igual a la representada en la fig. 3 del modelo M - 2.4

PIEZA Nº 10 48 (u) Fig. 3; Modelo M- 2.4

PIEZA Nº 6
48 (u)
Fig. 1



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.7

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.400

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, derivado de la red esférica exaédrica del modelo M - 2.4

Se obtiene este modelo al unir los nudos de la red esférica tipo b) del modelo M - 2.4, con lo que, los lados de los triángulos esféricos de la red, se transforman en triángulos rectilíneos, cuyos vértices son los nudos de dicha red, y sus lados serán cuerdas de los arcos de círculo máximo que forman los lados la red.

De esta forma se obtienen veinticuatro triángulos isósceles e iguales que son las caras superficiales del poliedro pedido.

Tomando como dato el radio r' de la esfera que contiene la red esférica exaédrica de tipo b), pueden calcularse, en función de r' las longitudes de los lados de los triángulos de las caras del poliedro.

Sea pues el

DATO Radio r' de la esfera que contiene la red esférica:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

Los lados iguales del triángulo isósceles de una cara, se pueden obtener del cuadrilátero mixtilíneo AGBDC de la fig. 1 del mod. M-2.4, que reproducimos en esta figura 1.

En ella obtenemos:

$AB = a_6 \sqrt{2}$ y $r' = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$, de donde $a_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} r'$ y sustituyendo:

Figura 1

Alvarez Noviembre 1978



$$\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2} \; r' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r' = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} r'} \qquad (1)$$

$$\overline{AH} = HB = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} : 2\, r' = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r'} \qquad (2)$$

y siendo $\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r'^2 - \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) r'\right]^2} =$

$$= \sqrt{r'^2 - \frac{6}{9} r'^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{9}}\, r' = \sqrt{\frac{3}{9}}\, r' = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} r'} \qquad (3)$$

de la fig. se deduce:

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \boxed{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} r' : r' = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ de donde

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}$$

$$\boxed{\overline{AG}} = 2\, \overline{IG} = 2 \times \overline{OG} \times \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 2\, r' \times \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{4\,(3 - \sqrt{3})}{6}}\, r' =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2\,(3 - \sqrt{3})}{3}}\, r'} \cong 0{,}91\,94\,01\,68\,7 \times 110 \cong 101{,}13\,41\,85\,5 \cong \boxed{101{,}1 \text{ mm}}$$

El lado desigual del triángulo inscrito, tiene una longitud igual a la arista a_6 del cubo inscrito en la esfera de radio r', que está representada por la distancia $\overline{AB}$ en la figura nº 1 del modelo M - 2.3.

Su valor, en función de $\underline{r'}$ fué entonces calculado y es

$$\boxed{\overline{AB}} = a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r' \cong 1{,}15\,47\,00\,53\,9 \times 110 \cong \boxed{127 \text{ mm}}$$



Los cálculos anteriores nos permiten la construcción gráfica del triángulo isósceles MNP de una cara del poliedro estudiado. (fig. 2)

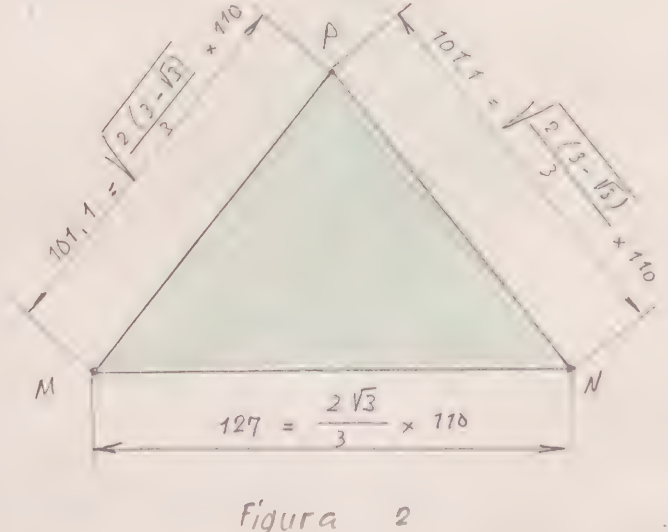


Figura 2

Los lados iguales de dicho triángulo isósceles, tiene la longitud:

$$\overline{MP} = \overline{PN} = \sqrt{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}} \times r' \cong 0{,}91\ 94\ 01\ 68\ 7\ldots \times 110 \cong 101.1 \text{ mm}$$

y el lado desigual MN, la de:

$$\overline{MN} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r' = 1{,}15\ 47\ 00\ 53\ 9\ldots \times 110 \cong 127 \text{ mm}$$

Para la construcción del poliedro estudiado de caras macizas, se necesitan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones son las de la figura nº 2

PIEZA Nº 1 24 (u) Figura 2

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades



Su forma y dimensiones (fig. 3), se deducen de las del triángulo MNP de la figura 2.

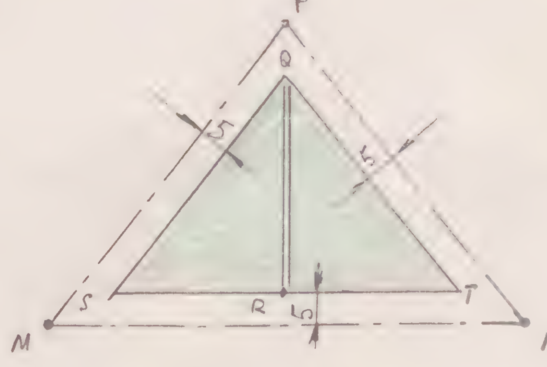


Figura 3

PIEZA Nº 2 24 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la altura QR del triángulo SQT de la figura 3.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 3 48 (u)
(simétricas 2 a 2)

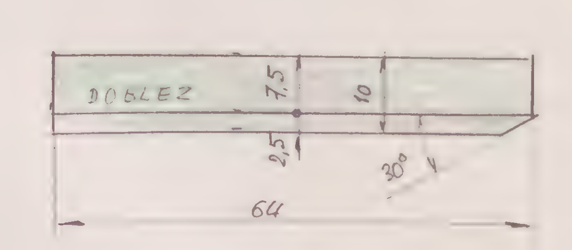


Fig. 4

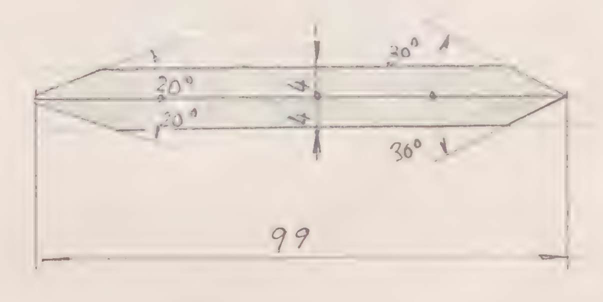
Figura 4

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de las aristas MP = PN.

de la figura 2.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



PIEZA Nº 4 24 (u)

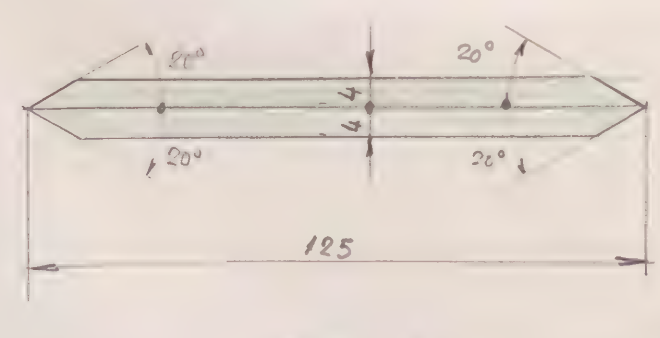
Fig. 5

Figura 5

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN LADO DESIGUAL DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista MN de la figura 2.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 5 12 (u)

Fig. 6

Figura 6

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones (fig. 7) se deducen de las del triángulo MNP de la figura 2.



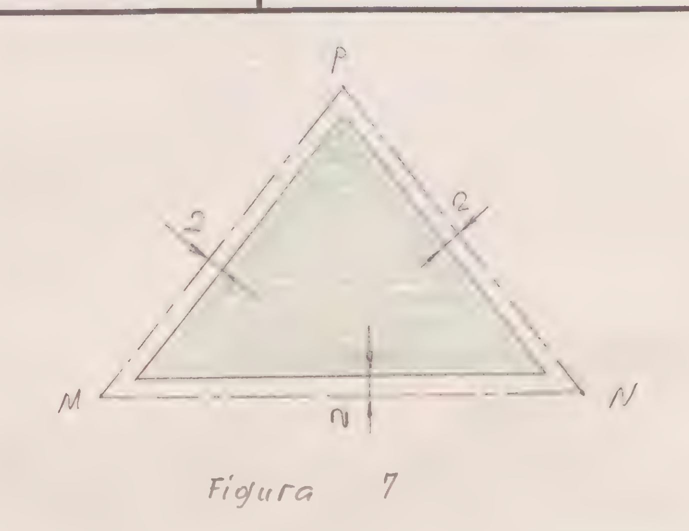


Figura 7

PIEZA Nº 6 24 (b)

Fig. 7

Este poliedro convexo, de caras triangulares iguales, tiene las siguientes características, que se deducen de la red esférica tipo b) del modelo M - 2.4.

Número de caras triangulares	24	C + V = A + 2
Número de vértices	14	24 + 14 = 36 + 2
Número de aristas	36	

Los vértices del poliedro son coincidentes con los nudos de la red esférica generadora y son de dos clases: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera de radio r' = 110 mm; y seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, también inscrito en la misma esfera

---

(firma) Noviembre 1978



PIEZA Nº 2

24 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 1

24 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 Figura 4

28 (u) simétricas 2 a 2

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 6

24 (u)

Figura 7

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.4.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, derivado de la red esférica exaédrica del modelo M - 2.4.

Este modelo es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2.7, con la variante de ser de caras vaciadas, al contrario que el anterior que lo era de "caras macizas"

Para la construcción de este modelo, se necesitan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1, que a su vez se deduce de la del triángulo MNP de la figura 2 del modelo M - 2.7.

P
101.1
101.1
4
4
4
M
N
127

Figura 1

PIEZA Nº 1 24 (U)

Fig. 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de las aristas MP o PN

UNE A 4-210 x 297



de la figura 1.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

30° 3.5 30°

30° 3.5 30°

99.

PIEZA Nº 2   24 (u)

Fig. 2

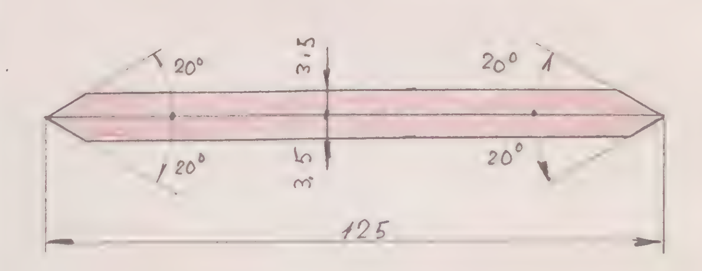
Figura 2

PIEZA Nº 3   UNIONES ARISTAS EN LADO DESIGUAL DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista MN de la figura 1.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



PIEZA Nº 3   12 (u)

Fig. 3

Figura 3

Este poliedro convexo de caras triangulares iguales, tiene las siguientes características, que se deducen de red esférica exagonal, tipo b) del modelo M - 2.4:



Modelo M-2.8

Número de caras triangulares	24
Número de vértices	14
Número de aristas	36

$C + V = A + 2$

$24 + 14 = 36 + 2$

Los vértices del poliedro son coincidentes con los nudos de la red esférica generadora, y son de dos clases: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera de radio $r' = 110$ mm; y seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, también inscrito en la misma esfera.

UNE A 4-210 x 297

Álvarez Noviembre 1978



PIEZA Nº 1

24 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 24 (u)

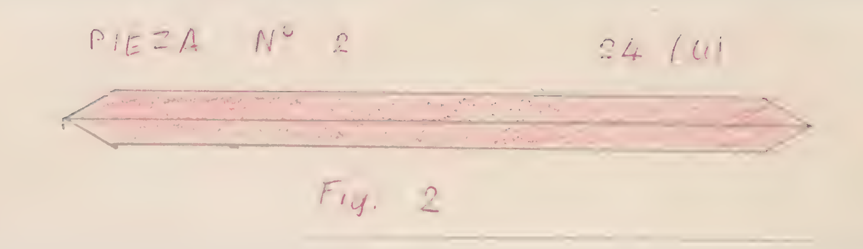


Fig. 2

PIEZA Nº 3 12 (u)

Fig. 3

MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.9

[illegible]

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGU-
LARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ES-
FÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, derivado de la red esférica exaédrica del modelo M - 2.6

Se obtiene este modelo al unir los nudos de la red esférica tipo c) del modelo M - 2.6, con lo que, los lados de los triángulos esféricos de la red, se transforman en triángulos rectilíneos, cuyos vértices son los nudos de dicha red, y sus lados serán cuerdas de los arcos de círculo máximo que forman los lados de la red.

De esta forma se obtienen cuarenta y ocho triángulos escalenos e iguales que son las caras superficiales del poliedro.

Tomando como dato el radio r' de la esfera que contiene la red esférica exaédrica de tipo c), pueden calcularse, en función de r' las longitudes de los lados de los triángulos escalenos ABC de las caras del poliedro.

Sea pues el

DATO: Radio r' de la esfera que contiene la red esférica:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

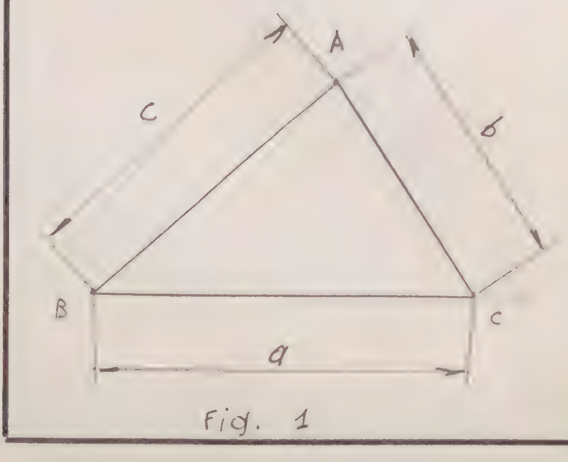


Fig. 1

Sea ABC (fig. 1) el triángulo de una cara.

La longitud "a" del lado mayor

UNE A 4-210 x 297

$\overline{FC}$ la hemos calculado ya en el modelo M-2.7 en cuya figura 1 está representada por el segmento AG, siendo pues:

$$AG = \boxed{a} = \boxed{\sqrt{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}}\, r'} \cong 0{,}91\,94\,01\,687 \times 110 \cong \boxed{101{,}1 \text{ mm}}$$

Análogamente, la longitud $AB = c$ (fig. 1) correspondiente al opuesto al vértice C del triángulo buscado, se puede obtener del cuadrilátero mixtilíneo A G B D C representado en la fig. 1 del modelo M-2.5 que reproducimos parcialmente en la fig. 2

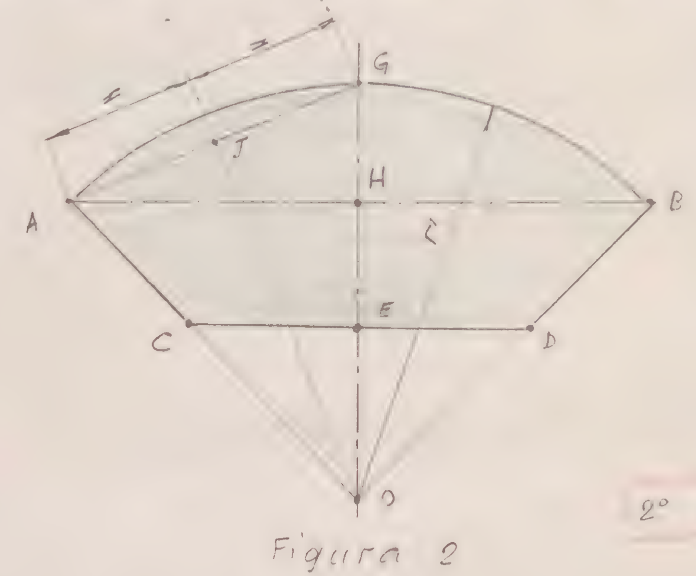


Figura 2

En ella obtenemos los siguientes valores

$\boxed{1^{\circ}\ AB} = \boxed{\sqrt{2}\ r'} \cong 1{,}41\,42\,13\,56\,2 \times 110 = 155{,}5$ mm y de aquí:

$\boxed{2^{\circ}\ AH}$ $\quad \overline{AH} = \overline{HB} = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, r' \cong$

y siendo $\boxed{\overline{OH}} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r'^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r'\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\; r' =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\; r' = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, r'}$; de la fig. 2, se deduce: $\frac{OH}{OA} = \boxed{\cos\alpha} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} r' : r' = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; de aquí: $\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ pero siendo $\overline{AG} = \boxed{c} = 2\,\overline{JG} =$

$= 2\,\overline{OG}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 2\,r' \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} =$



$= \boxed{\sqrt{2-\sqrt{2}}\ r'} = 0{,}76\ 53\ 66\ 86\ 5 \times 110 \cong \boxed{84{,}2\ \text{mm}}$

Finalmente, la longitud AC = b (fig. 1) correspondiente al lado menor, del triángulo ABC, opuesto al vértice B del triángulo buscado se puede obtener a su vez del cuadrilátero AGBDC, representado en la fig. 1 del modelo M - 2.3 que reproducimos parcialmente en la figura 3.

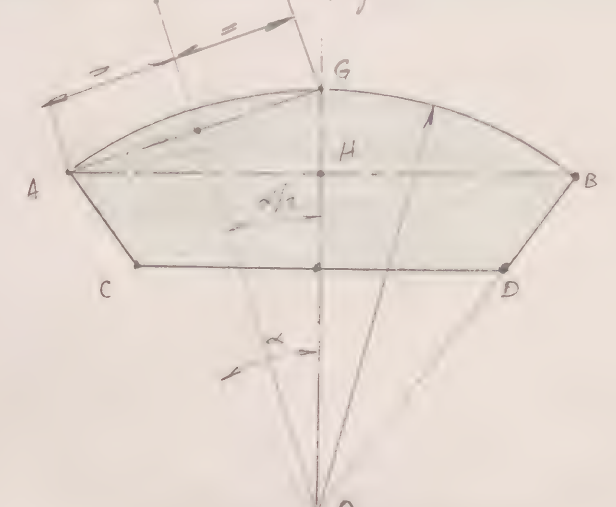


Figura 3

En ella obtenemos los siguientes valores:

1° AB $\quad AB = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\, r' \cong$

$\cong 1{,}15\ 47\ 00\ 53\ 9 \times 110 \cong \boxed{127\ \text{mm}}$

y de aquí:

2° AH $\quad \overline{AH} = \overline{HB} = \dfrac{AB}{2} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3} : 2\, r' = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\, r'}$ y siendo $\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} =$

$= \sqrt{r'^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\, r'\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}}\ r' = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ r' = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}\, r'}$; de la fig. 3 se

deduce $\dfrac{OH}{OA} = \boxed{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\, r' : r' = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ y de aquí:

$\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}}$; pero siendo

$\overline{AG} = \boxed{b} = 2\ \overline{JG} = 2\ \overline{OG}\ \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = 2\, r' \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{\dfrac{4(3-\sqrt{6})}{6}}\ r' = \boxed{\sqrt{\dfrac{2(3-\sqrt{6})}{3}}}\ r'$



$\cong 0{,}60\ 58\ 10\ 89\ 3 \times 110 \cong$ 66,5 mm

Los resultados de los cálculos anteriores se expresan en la figura 4, en la que se acotan las longitudes de los lados del triángulo escaleno de una cara del poliedro pedido.

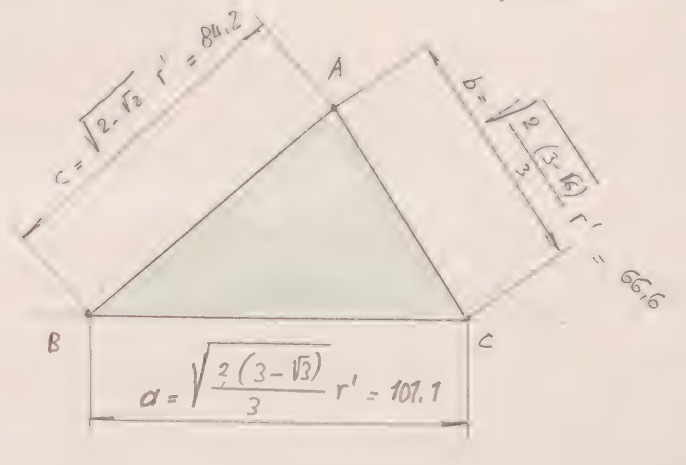


Figura 4

Para la construcción del poliedro estudiado de caras macizas, se necesitan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

La forma y dimensiones son las de la figura 4

PIEZA Nº 1 48 (u) Figura 4

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

La forma y dimensiones (fig. 5), se deducen de las del

UNE A 4-210 x 297



Triángulo ABC de la figura 4.

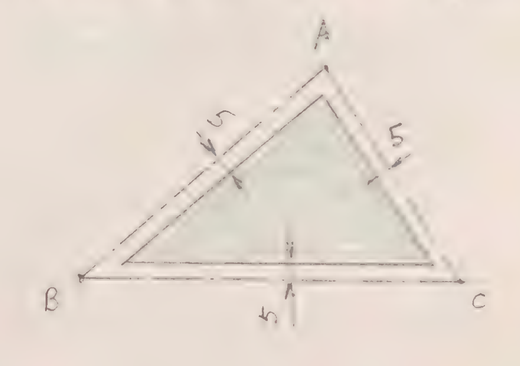


Figura 5

PIEZA Nº 2 48 (u)

Fig. 5

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS LADO "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA (Fig. 4) 24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de dicho lado.
Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

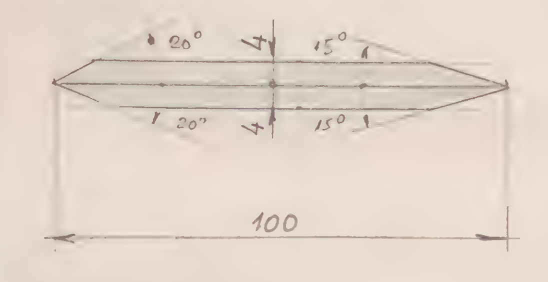


Figura 6

PIEZA Nº 3 24 (u)

Fig. 6

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS LADO "C" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA (fig. 4) 24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de dicho lado
Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7



		Modelo M-2.9

20° 4 15°

20° 4 15°

83

Figura 7

PIEZA Nº 4 24 (u)

Fig. 7

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS LADO "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA (fig. 4) 24 unidades

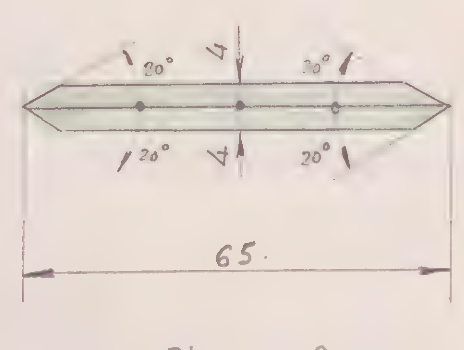


Figura 8

Su longitud es ligeramente inferior a la de dicho lado.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8.

PIEZA Nº 5 24 (u) Fig. 8

Este poliedro convexo, de caras triangulares iguales, tiene las siguientes características, que se deducen de la red esférica tipo c) del modelo M-2.6

Número de caras	48
Número de vértices	26
Número de aristas	72

$c + V = A + 2$

$48 + 26 = 72 + 2$

Los vértices del poliedro son coincidentes con los nudos de la red

UNE A 4-210 x 297



esférica generadora y son de tres clases: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimédiano III, también inscrito en la misma esfera.

En los vértices de clase a) concurren seis aristas; en los de clase b) concurren ocho aristas y en los de clase c), concurren cuatro aristas

---

(incluir la siguiente pieza nº 6, a continuación de la nº 5 en la hoja 6)

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

48 unidades (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones (fig. 9), se deducen de las del triángulo ABC de la figura 4

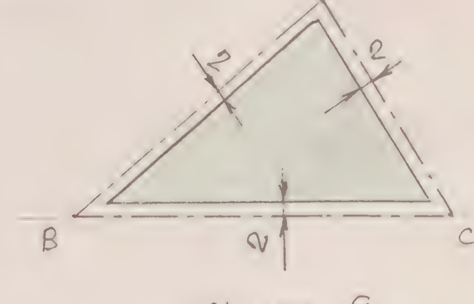


Figura 9

PIEZA Nº 6 48 (u) (simétricas 2 a 2)

Fig. 9

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 2
48 (u)
Fig. 5

PIEZA Nº 1
48 (u)
Fig. 4

PIEZA Nº 3 24 (u)

Fig. 6

PIEZA Nº 4 24 (u)

Fig. 7

PIEZA Nº 5 24 (u)

Fig. 8

PIEZA Nº 6
48 (u) (simétricas 2 a 2)
Fig. 9

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M. 2-6.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm



	[illegible] de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 2.10

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, derivado de la red esférica exaédrica del modelo M - 2.6

Este modelo es el mismo que el estudiado en el modelo M-2.9, con la variante de ser de caras vaciadas, al contrario que el anterior que lo era de "caras macizas".

Para la construcción de este modelo se necesitan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1, que a su vez se deduce de la del triángulo ABC de la fig. 4 del modelo M - 2.9.

c = 84.2
b = 66.6
4
4
4
a = 101.1

Figura 1

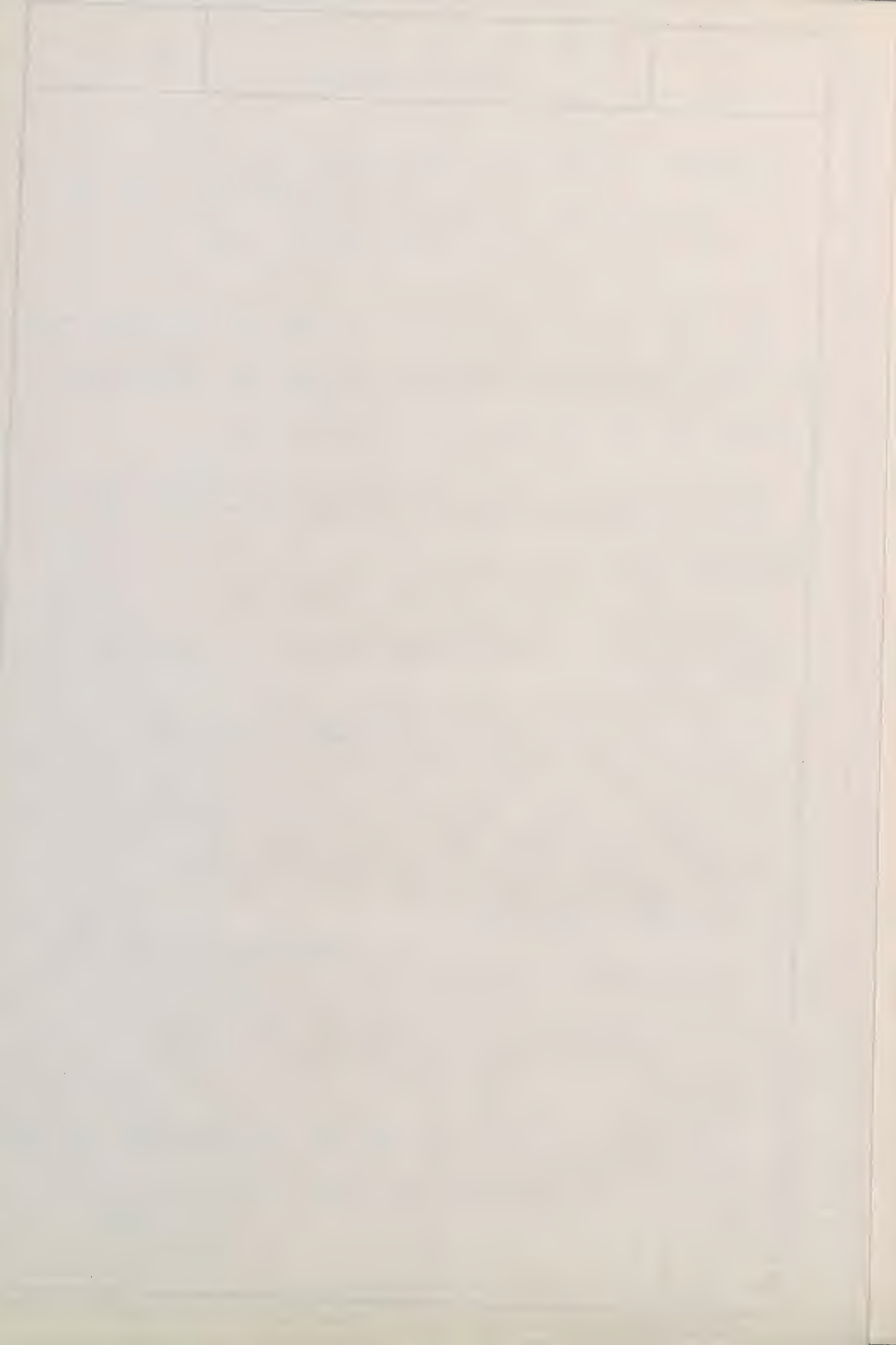
PIEZA Nº 1 48 (u)

Fig. 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL (fig. 1)

24 unidades

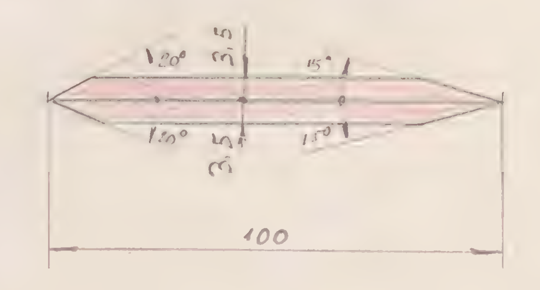
Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista respec-



		Modelo M-5.10

[illegible]

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2



PIEZA Nº 2 24 (u)

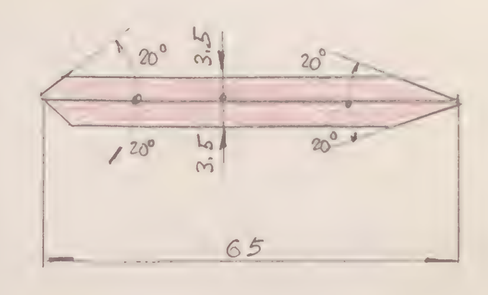
Fig. 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIANGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL (Fig. 1)

24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista respectiva. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



PIEZA Nº 3 24 (u)

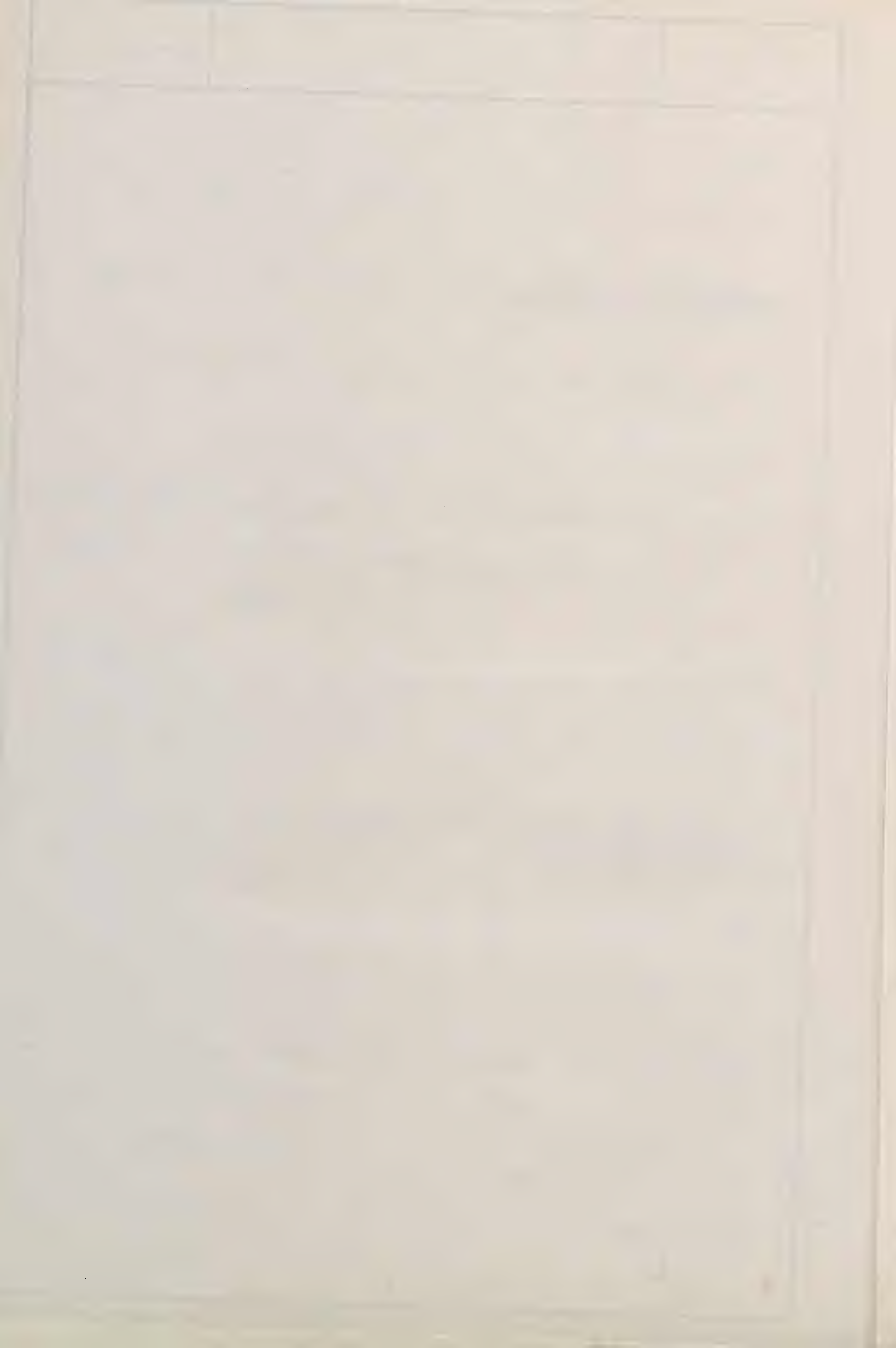
Fig. 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "c" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL (Fig. 1)

24 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista respectiva. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4.



20° 3,5 15°

20° 3,5 15°

83

Figura 4

PIEZA Nº 4 [illegible]

Fig. 4

Este poliedro convexo de caras triangulares iguales, tiene las mismas características que la del modelo M - 2.9. de caras macizas, por lo que omitimos su repetición.

UNE A 4-210 x 297

Alvarez · Diciembre 1978

PATRONES

M - 2.10

PIEZA Nº 1

48 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 24 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 24 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 4

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo [redacted] M - 2.11

POLIEDRO [redacted] CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6 Y ARQUIMEDIANO III INSCRITO EN EL MISMO.

Radio de la esfera circunscrita:

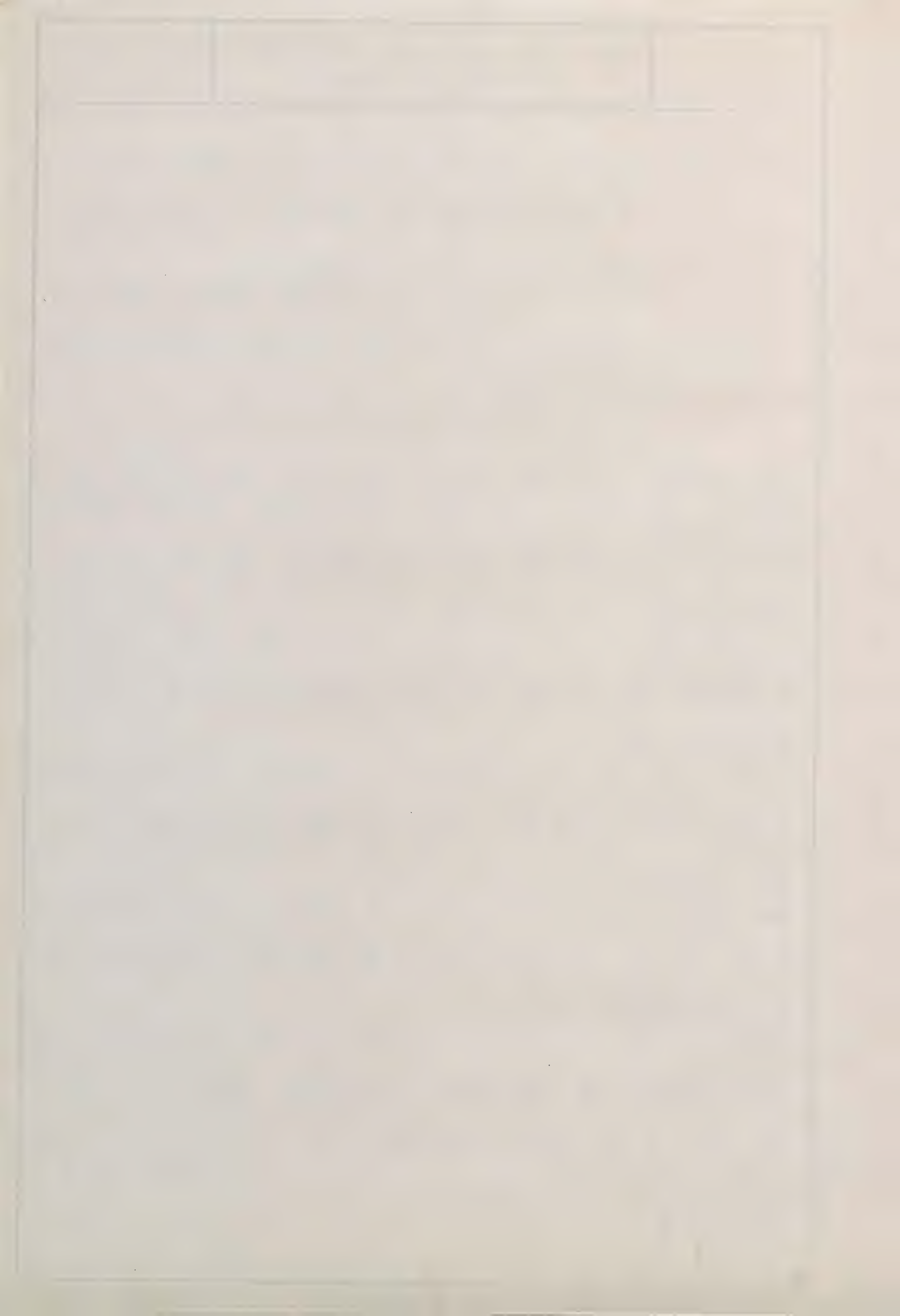
$r' = 110$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, estudiado en el modelo M-2.9, e incluir en el mismo el Arquimediano III, inscrito en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares.

En el estudio del modelo M-2.9, obtuvimos un poliedro convexo de cuarenta y ocho caras triangulares iguales obtenido al unir los nudos de una red esférica tipo c) del modelo M-2.6 al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificamos en tres clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

En este modelo M-2.11 que estudiamos ahora, se incluye el Arquimediano III con caras macizas dentro del poliedro M-2.10 de caras vaciadas. Los vértices comunes de ambos poliedros son los de la clase c) mencionada anteriormente.



Para la construcción de estos poliedros se necesitan las siguientes piezas:

A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" (r' = 110 mm).

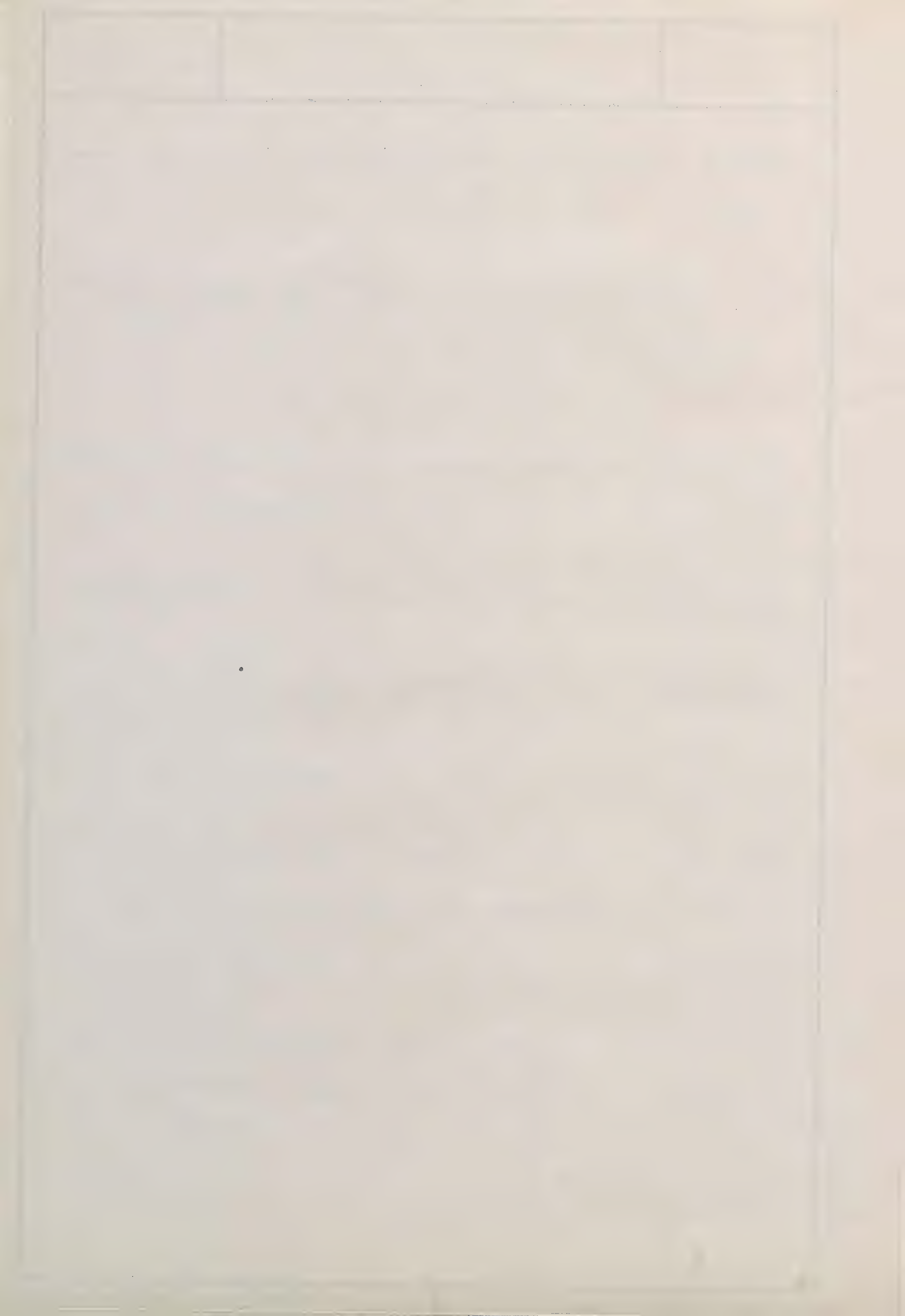
Este poliedro (de caras vaciadas) es el mismo que el estudiado en el modelo M-2.10, por lo que, tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "c" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades



B) POLIEDRO INTERIOR, ARQUIMEDIANO III, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" ($r' = 110$ mm)

Este poliedro (de caras macizas) ha sido estudiado en el ejercicio G. E. nº , y representado en la lámina nº 35. y tiene las siguientes características:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$	
Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$	$C + V = A + 2$
Número de vértices	$V = 12$	$(8+6)+12 = 26$
Número de aristas	$A = 24$	
Número de caras de un ángulo sólido	$2C_3 + 2C_4$	

Para la construcción de este poliedro, se necesitan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 8 unidades

Tienen la forma de triángulos equiláteros.
La longitud de su lado l_3 es la de la arista a^{III} del Arquimediano III inscrito en una esfera de radio $r' = 110$ mm.
Su valor se deduce de la fórmula nº del ejercicio G. E. en la que $r' = a^{III} = l_3$, por lo que será:

$$l_3 = 110 \text{ mm}$$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1



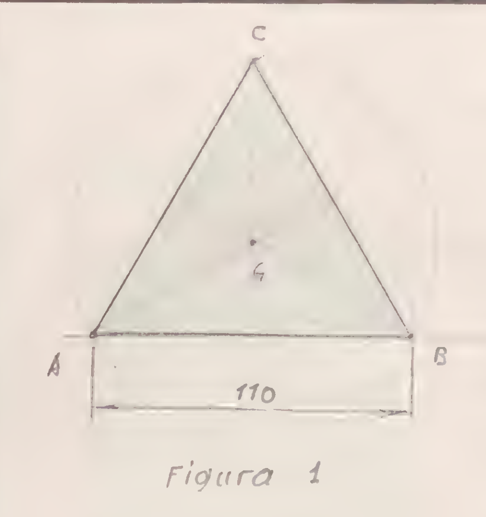


Figura 1

PIEZA Nº 1 8 (4)

Fig. 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Tienen la forma de cuadrados (cuadrilátero regular convexo). La longitud de su lado l_4 es igual a la arista a^{III} del Arquimediano III inscrito en la esfera de radio $r' = 110$ mm, por lo que será:

$$r' = a^{III} = l_4 = 110 \text{ mm} \quad (1)$$

Como comprobación, se puede deducir de la fig. 1 del modelo M-2.5, en la que l_4 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales son $AH = HB = \frac{AB}{2}$

y siendo $AB = \sqrt{2}\, r'$, tendremos:

$AH = HB = \frac{\sqrt{2}}{2} r'$ de donde

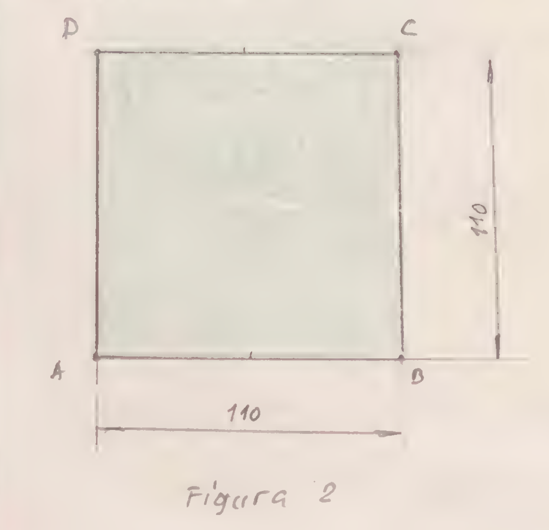
$$l_4 = \sqrt{2\, \overline{AH}^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r'\right)^2} = \sqrt{2 \times \frac{2}{4}}\; r' = r' = 110 \text{ mm}$$

coincidente con el valor de la fórmula (1), aplicada anteriormente

Calvarez Diciembre 1978



La forma y dimensiones de esta cara cuadrada, se representan en la figura 2



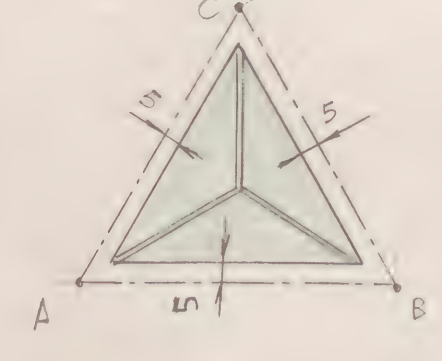
PIEZA Nº 2 6 (u)

Fig. 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 8 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 3 y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1



PIEZA Nº 3 8 (u)

Fig. 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2



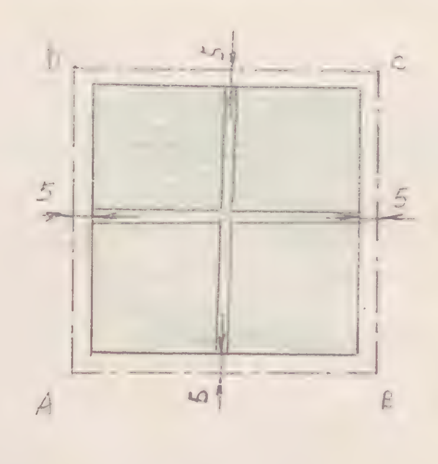


Figura 4

PIEZA Nº 4 — 6 (u)

Fig. 4

PIEZA Nº 5 — REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES — 24 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo de las caras (fig. 3) y su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

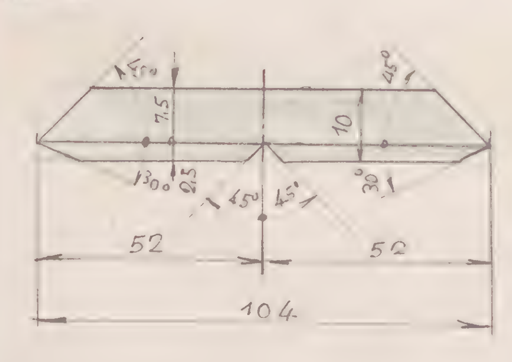


Figura 5

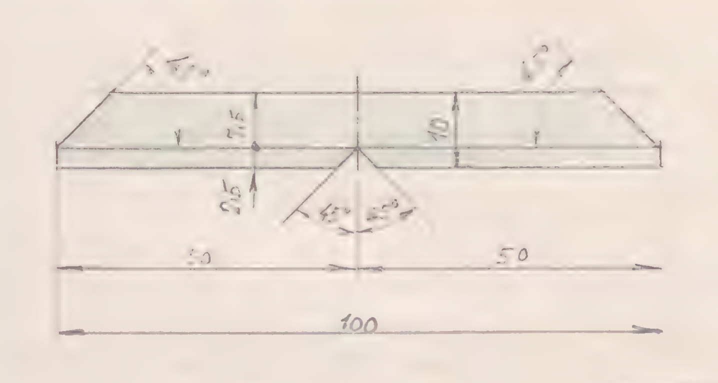
PIEZA Nº 5 — 24 (u)

Fig. 5

PIEZA Nº 6 — REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS — 24 unidades

Se colocan en la dirección a las paralelas medias de las cacaras (fig. 4) y su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

UNE A 4-210 x 297



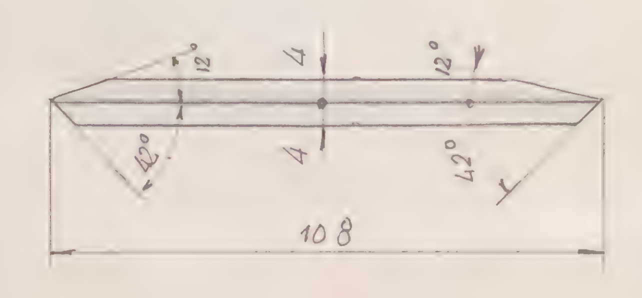
PIEZA Nº 6 24 (u)

Fig. 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7.



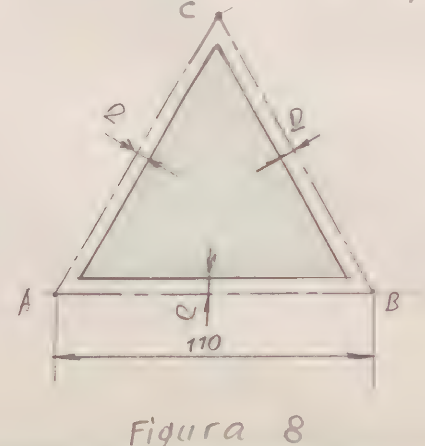
PIEZA Nº 7 12 (u)

Fig. 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 8, y se deducen del triángulo ABC de la figura 1



PIEZA Nº 8 8 (u)

Fig. 8

Figura 8



PIEZA Nº 9 — FORRO COLOREADO EN LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS — 6 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 9 y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2

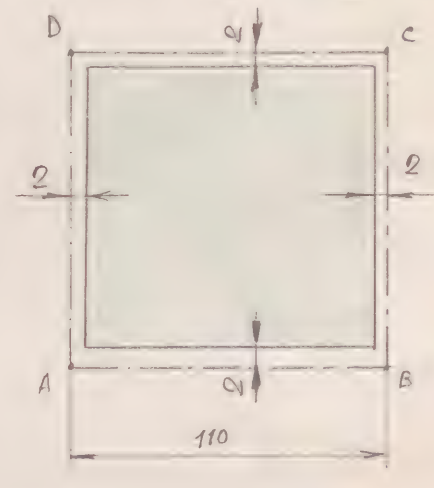


Figura 9

PIEZA Nº 9 6 (4)

Fig. 9



PATRONES

M - 2,11

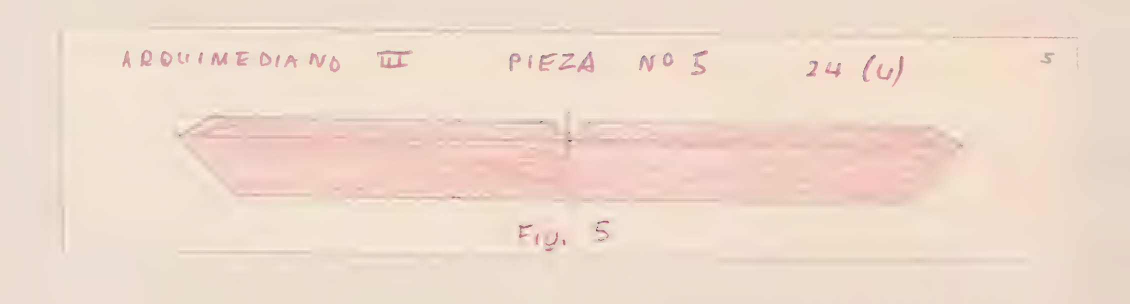


Fig. 5

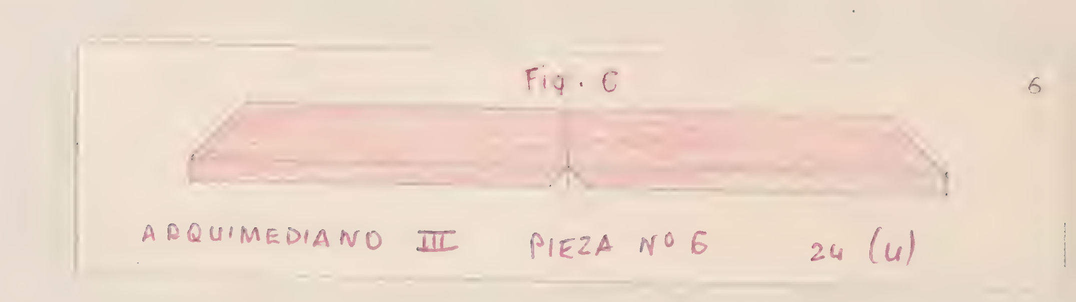


Fig. 6

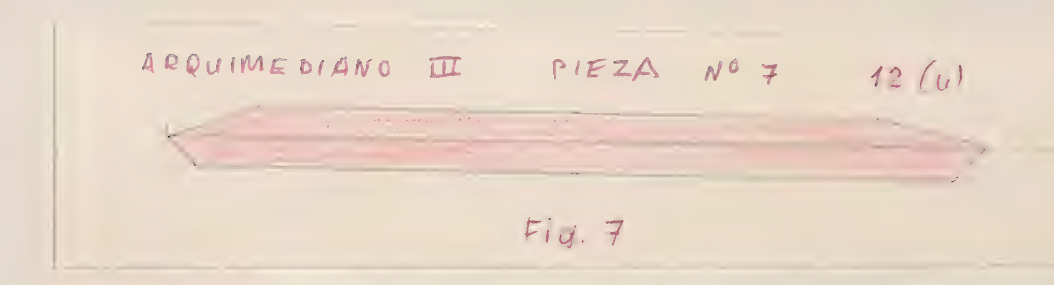


Fig. 7

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 8

8 (u)

Fig. 8

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 9

6 (u)

Fig. 9

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 2

6 (u)

Fig. 2

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 1

8 (u)

Fig 1

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 3

8 (u)

Fig. 3

ARQUIMEDIANO III

PIEZA Nº 4

6 (u)

Fig. 4

POLIEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M - 2.6, EN EL CUAL ESTÁN INSCRITOS DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS

Radio de la esfera circunscrita :

$r' = 110$ mm.

	Sistemas de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.12

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, estudiado en el modelo M-2.9, en el cual están inscritos dos tetraedros regulares iguales, conjugados por sus aristas, en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares iguales

En el estudio del modelo M-2.9, obtuvimos un poliedro convexo de cuarenta y ocho caras triangulares iguales, obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo c) del modelo M-2.6, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificamos en tres clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

El modelo M-2.12 que estudiamos ahora, está formado por dos tetraedros regulares, convexos, iguales, conjugados por sus aristas con caras macizas dentro del poliedro M-2.10 de caras vaciadas. Los vértices comunes de los dos tetraedros regulares conjugados, con los del poliedro M-2.10, son los de la clase a) vértices de un cubo inscrito en la esfera.

UNE A 4-210 x 297

[illegible] Diciembre 1978

Para la construcción de estos poliedros, se necesitan las siguientes piezas:

A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO, DE CARAS TRIANGULARES VACIADAS, E IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO $r' = 110$ mm.

Este poliedro es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2.10, que se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1	CARAS SUPERFICIALES	48 unidades
PIEZA Nº 2	UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL	24 unidades
PIEZA Nº 3	UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL	24 unidades
PIEZA Nº 4	UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "c" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL	24 unidades

———

UNE A 4-210 x 297



B) POLIEDRO INTERIOR DE CARAS MACIZAS, FORMADO POR DOS TETRAEDROS REGULARES CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, E INSCRITO EN LA MISMA ESFERA CIRCUNSCRITA AL POLIEDRO A) EXTERIOR

Este poliedro es igual al ya estudiado en el modelo M-12.1, y se compone de las siguientes piezas;

A1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DADO, DE ARISTA $d_4 = 179.6$ mm.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN ZONAS VISTAS DE LAS CARAS LATERALES Y PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

[illegible] · Diciembre 1978



A2) TETRAEDRO REGULAR CONJUGADO, INSCRITO EN LA MISMA ESFERA QUE EL TETRAEDRO A1), DE ARISTA $a_4 = 179{,}6$ mm

PIEZA Nº 6 CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

12 unidades

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

12 unidades

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

24 unidades

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

24 unidades



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.13

POLIEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6, EN EL CUAL ESTÁN INSCRITOS UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES, CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, estudiado en el modelo M-2.9 dentro del cual están situados un icosaedro y un octaedro, ambos regulares, convexos y conjugados por sus aristas estando todos sus vértices en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro de caras triangulares iguales.

En el estudio del modelo M-2.9 obtuvimos un poliedro convexo de cuarenta y ocho caras triangulares iguales, obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo c) del modelo M-2.6, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificábamos en tres clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera

El modelo M-2.13 que estudiamos ahora, está formado por un icosaedro y un octaedro regulares convexos, conjugados por sus aristas, con caras macizas situados ambos en el interior del poliedro modelo M-2.10 de caras vaciadas.

[illegible] Enero 1979



Los tres poliedros descritos anteriormente (el de 48 caras triangulares iguales y vaciadas, y los exaedro y octaedro regulares convexos, conjugados por sus aristas, ambos de caras macizas, tienen común su esfera circunscrita. Los vértices del exaedro regular convexo son coincidentes con los nudos de la red generadora, clase a), del modelo M-2.6. Los vértices del octaedro regular convexo son coincidentes con los nudos de la red esférica, clase b), del mencionado modelo M-2.6.

Para la construcción de estos poliedros se necesitan las siguientes piezas:

1) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO, DE CARAS TRIANGULARES VACIADAS E IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO $r' = 110$ mm

Este poliedro es igual al estudiado en el modelo M-2.10, y se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "C" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

---

2) POLIEDRO INTERIOR DE CARAS MACIZAS, FORMADO POR UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES Y CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, E INSCRITOS EN LA MISMA ESFERA CIRCUNSCRITA AL POLIEDRO 1) EXTERIOR

Este poliedro es igual al estudiado en el modelo M - 23.1 y se compone de las siguientes piezas:

A) EXAEDRO

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Iguales a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Iguales a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 3 (fig. 3) del modelo M - 23.1

UNE A 4-210 x 297

[signature] Febrero 1977

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

Iguales a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M - 23.1

B) OCTAEDRO

PIEZA Nº 9 CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

24 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 10 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO

24 unidades

Iguales a la pieza nº 8 (fig. 8) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO REGULAR

48 unidades

Iguales a la pieza nº 7 (fig. 7) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO 24 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 23.1

[illegible] Febrero 1979

Modelo M- 2,13

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

Iguales a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M - 23.1

B) OCTAEDRO

PIEZA Nº 9 CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

24 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 10 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO

24 unidades

Iguales a la pieza nº 8 (fig. 8) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO REGULAR

48 unidades

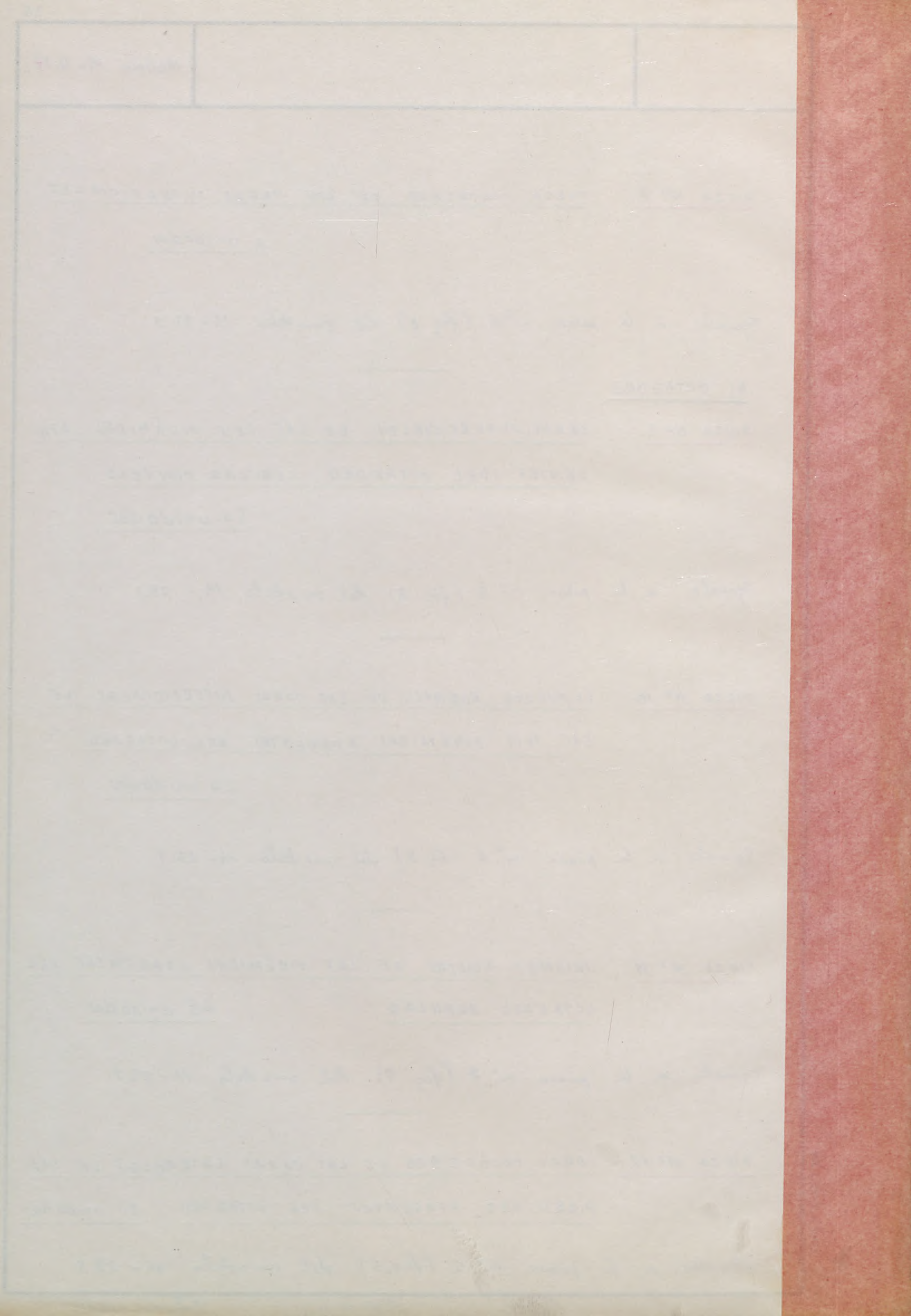
Iguales a la pieza nº 7 (fig. 7) del modelo M - 23.1

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES DEL OCTAEDRO

24 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 23.1

Calvarez Febrero 1979



colorchecker CLASSIC

mm

calibrite